85

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. E. J. BROUWER, CONSTANTIN CARATHÉODORY, OTTO HÖLDER,
CARL NEUMANN, MAX NOETHER

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

WALTHER V. DYCK
IN MÜNCHEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

79. Band. 4. Heft

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1919

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten. **Die Redaktion.**

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Generalregister zu den mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. Geh. M. 7.—

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 5, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29, **Otto Blumenthal**, Aachen, Rütscherstraße 50.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion.

Über die algebraische Darstellung der Normgebilde.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der Abhandlung „Über die Theorie der algebraischen Formen"*) betrachtet Herr Hilbert als Beispiel für einige seiner grundlegenden algebraischen Sätze unter anderem die durch die Gleichungen

(1) $$x_0 = \xi_1^3, \quad x_1 = \xi_1^2\xi_2, \quad x_2 = \xi_1\xi_2^2, \quad x_3 = \xi_2^3$$

definierte Raumkurve dritter Ordnung, wobei x_0, x_1, x_2, x_3 die homogenen Raumkoordinaten und ξ_1, ξ_2 zwei veränderliche Parameter bezeichnen. Wie Herr Hilbert zeigt, wird diese Kurve durch die quadratischen Gleichungen

(2) $$\Phi_1 \equiv x_0x_2 - x_1^2 = 0, \quad \Phi_2 \equiv x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad \Phi_3 \equiv x_1x_3 - x_2^2 = 0$$

in dem Sinne vollständig dargestellt, daß die Gleichung jeder die Kurve enthaltenden Fläche in der Gestalt

(3) $$F(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 + A_3\Phi_3 = 0$$

geschrieben werden kann, unter A_1, A_2, A_3 Formen von x_0, x_1, x_2, x_3 verstanden. Oder in anderer Ausdrucksweise:

„Die Formen $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$, welche durch die Substitution (1) in identisch verschwindende Formen der Parameter ξ_1, ξ_2 übergehen, bilden den durch die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_0, & x_1, & x_2 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix}$$

definierten Modul."

In den folgenden Zeilen will ich den entsprechenden Satz für das allgemeinste Normgebilde beweisen.

Zunächst habe ich auseinanderzusetzen, was ich unter einem „Normgebilde" verstehe.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ Parameter, deren Anzahl r größer als 1 ist. Ich betrachte die Potenzprodukte

(4) $$\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_r^{\alpha_r}$$

*) Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 473.

dieser Parameter von einem bestimmten Grade

(5) $$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r,$$

wobei auch der Grad n größer als 1 vorausgesetzt werden soll.

Die Anzahl dieser Potenzprodukte bezeichne ich mit k; sie wird bekanntlich durch den Binomialkoeffizienten

(6) $$k = \binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$$ ausgedrückt.

Setzt man nun die k homogenen Koordinaten eines Punktes im Raume von $(k-1)$ Dimensionen proportional den in irgend eine Reihenfolge gebrachten Potenzprodukten (4) der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$, so wird durch diesen Ansatz ein algebraisches Gebilde von $r-1$ Dimensionen in dem betrachteten Raume von $k-1$ Dimensionen definiert, welches ich als *Normgebilde* bezeichnen will. Im Falle $r = 2$ ist also das Normgebilde nichts anderes, als die durch die Gleichungen

$$x_0 = \xi_1^n, \quad x_1 = \xi_1^{n-1}\xi_2, \quad x_2 = \xi_1^{n-2}\xi_2^2, \quad \cdots, \quad x_n = \xi_2^n$$

definierte, gewöhnlich als „Normkurve" bezeichnete Kurve n^{ter} Ordnung im Raume von n Dimensionen, die im Falle $n = 3$ mit der Kurve dritter Ordnung (1) zusammenfällt.*)

Eine zweckmäßige Bezeichnung für die Koordinaten des Normgebildes bietet sich sozusagen von selbst dar. Diejenige Koordinate nämlich, welche dem Potenzprodukt (4) proportional gesetzt wird, wird man passend dadurch bezeichnen, daß man das betreffende Potenzprodukt in eckige Klammern einschließt, also mit

(7) $$[\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r}]$$

oder auch, noch kürzer, dadurch, daß man die Exponenten des Potenzproduktes in Klammern setzt, also mit

(8) $$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r].$$

Die k Gleichungen, welche das Normgebilde von $r-1$ Dimensionen im Raume von $k-1$ Dimensionen definieren, lauten dann also einfach

(9) $$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r] = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r},$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ alle Systeme von r nicht negativen ganzen Zahlen anzunehmen haben, welche der Gleichung $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = n$ genügen.

Ich werde jetzt den hauptsächlichsten in dieser kleinen Arbeit zu beweisenden Satz formulieren.

) Vgl. W. Fr. Meyer in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, S. 392, Anmerkung 383).

Es mögen $$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l$$
die Potenzprodukte des Grades $n-1$ der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ bedeuten. Dann wird jedes Element der Matrix

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} [\xi_1\pi_1], & [\xi_1\pi_2], & \cdots, & [\xi_1\pi_l] \\ [\xi_2\pi_1], & [\xi_2\pi_2], & \cdots, & [\xi_2\pi_l] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\xi_r\pi_1], & [\xi_r\pi_2], & \cdots, & [\xi_r\pi_l] \end{vmatrix}$$

mit einer der k Variabeln (7) zusammenfallen, weil jedes der Produkte $\xi_i\pi_k$ ein Potenzprodukt n^{ten} Grades der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ vorstellt. Die Determinanten zweiten Grades dieser Matrix sind also quadratische Formen der k Variabeln (7), welche Formen ich in irgend einer Reihenfolge mit

(11) $$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_\mu$$ bezeichnen will.

Diese Formen haben die Eigenschaft, identisch zu verschwinden, wenn man jede der k Variabeln durch das ihr entsprechende Potenzprodukt der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ ersetzt, oder, wie ich kurz sagen will, wenn man die Substitution (9) ausführt. Denn es geht z. B. die Form

$$(12)\qquad \Phi_1 = \begin{vmatrix} [\xi_1\pi_1], & [\xi_1\pi_2] \\ [\xi_2\pi_1], & [\xi_2\pi_2] \end{vmatrix}$$

dabei über in die identisch verschwindende Determinante
$$\begin{vmatrix} \xi_1\pi_1, & \xi_1\pi_2 \\ \xi_2\pi_1, & \xi_2\pi_2 \end{vmatrix}.$$ Die quadratischen Flächen

$$(13)\qquad \Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0, \cdots, \Phi_\mu = 0$$

gehen also sämtlich durch das Normgebilde.

Der zu beweisende Satz besagt nun, daß die Gleichungen (13) das Normgebilde „vollständig" darstellen. Es gilt mit anderen Worten der

Hauptsatz: *Diejenigen Formen F der k Variabeln* (8), *welche identisch verschwinden, wenn man in ihnen die Substitution* (9) *ausführt, bilden den Modul*

$$(14)\qquad M = [\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_\mu].$$

Den Beweis gründe ich auf die Herstellung eines Restsystems m^{ten} Grades des Moduls M. Hierunter ist folgendes zu verstehen.

Es bedeute zunächst M einen ganz beliebigen Modul, bestehend aus Formen von irgendeiner Anzahl k von Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Unter den Potenzprodukten m^{ten} Grades dieser Variabeln, wobei m eine positive ganze Zahl bezeichnet, lassen sich dann immer solche, etwa

$$(15)\qquad P_1, P_2, \cdots, P_h,$$

derart auswählen, daß jedes beliebige Potenzprodukt m^{ten} Grades P einer Kongruenz

(16) $$P \equiv c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_h P_h \quad (\text{mod. } M)$$

genügt, unter $c_1, c_2, \cdots, c_h$ Konstante verstanden. Denn sicher werden z. B. alle überhaupt existierenden Potenzprodukte m^{ten} Grades ein solches System (15) bilden. Wenn nun das System (15) so gewählt ist, daß die Anzahl h seiner Glieder möglichst klein ist, so heißt dasselbe ein „Restsystem m^{ten} Grades" des Moduls M. Ein solches Restsystem ist offenbar dadurch charakterisiert, daß seine h Glieder mod. M linear unabhängig sind, während sie mit jedem weiteren Potenzprodukte m^{ten} Grades zusammen ein abhängiges System bilden. Dabei ist noch zu bemerken, daß in dem speziellen Falle, wo *jedes* Potenzprodukt m^{ten} Grades $\equiv 0$ (mod. M) sein sollte, $h = 0$ zu setzen ist. Das Restsystem enthält dann überhaupt kein Glied, es ist ein „leeres" System.

Die Anzahl h ist nur vom Modul M und von m abhängig und die Funktion $h = \chi(m)$ ist mit der Hilbertschen charakteristischen Funktion des Moduls identisch.*)

Ich wende mich nun zur Betrachtung des speziellen Moduls (14). Es sei

(17) $$P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r][\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r] \cdots [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r]$$

ein Potenzprodukt m^{ten} Grades der Variabeln (8), so daß also auf der rechten Seite von (17) m der Variabeln zu einem Produkte vereinigt sind. Im Falle $m = 1$ fällt P mit einer einzelnen der Variabeln (8) zusammen; im Falle $m > 1$ brauchen natürlich die m Variabeln, die die Faktoren von P bilden, nicht alle voneinander verschieden zu sein.

Durch die Substitution (9) geht P über in

(18) $$\Pi = \xi_1^{\alpha_1+\beta_1+\cdots+\lambda_1}\,\xi_2^{\alpha_2+\beta_2+\cdots+\lambda_2} \cdots \xi_r^{\alpha_r+\beta_r+\cdots+\lambda_r},$$

also in ein Potenzprodukt vom Grade

(19) $$(\alpha_1+\beta_1+\cdots+\lambda_1)+(\alpha_2+\beta_2+\cdots+\lambda_2)+\cdots+(\alpha_r+\beta_r+\cdots+\lambda_r) = m \cdot n$$

der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$. Das Potenzprodukt Π heiße das dem Potenzprodukt P „entsprechende". Zunächst beweise ich jetzt den

Hilfssatz: *Man kann das Potenzprodukt P m^{ten} Grades der Variabeln (8) so wählen, daß das ihm entsprechende Potenzprodukt Π der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ mit einem beliebig vorgeschriebenen*

(20) $$\Pi = \xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2}\cdots\xi_r^{\mu_r}$$ *vom Grade*

(21) $$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = m \cdot n$$ *zusammenfällt.*

*) Hilbert, a. a. O. S. 509. Die charakteristische Funktion heißt „Hilbertsche Funktion" des Moduls M nach E. Lasker. Vgl. dessen inhaltsreiche Abhandlung „Zur Theorie der Moduln und Ideale" in Band 60 der mathematischen Annalen, S. 49.

Der Beweis geschieht auf induktivem Wege. Im Falle $m = 1$ ist klar, daß der Hilfssatz richtig ist. Denn dann genügt es offenbar, $P = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r]$ zu wählen. Ist aber $m > 1$, so erhellt die Richtigkeit des Satzes, unter der Voraussetzung, daß er für den Fall, wo $m - 1$ an die Stelle von m tritt, schon bewiesen sei, durch folgende Überlegungen.

Es sei das Potenzprodukt (20) vorgeschrieben, und in der Reihe

$$\mu_1,\ \mu_1 + \mu_2,\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,\ \cdots,\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = m \cdot n$$

sei $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h$ das erste Glied, welches $\geqq n$ ist. Dann wird die durch die Gleichung $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h - \nu$ definierte Zahl ν nicht negativ sein, während $\mu_h - \nu$ positiv ist, weil andernfalls schon $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{h-1} = n - (\mu_h - \nu) \geqq n$ wäre. Man kann daher Π in der Form schreiben

$$\Pi = \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi_h^{\mu_h - \nu} \cdot \xi_h^{\nu} \cdots \xi_r^{\mu_r} = \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi_h^{\mu_h - \nu} \cdot \overline{\Pi},$$

wo $\overline{\Pi}$ ein Potenzprodukt vom Grade $(m-1)n$ bezeichnet.

Wenn nun $\overline{P}$ ein Potenzprodukt $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades der Variabeln (8) ist, dem das Potenzprodukt $\overline{\Pi}$ der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ entspricht, so wird offenbar dem Potenzprodukt m^{ten} Grades

$$P = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h - \nu, 0, 0, \cdots, 0] \cdot \overline{P}$$

das Potenzprodukt Π entsprechen. Der Hilfssatz gilt somit allgemein.

Ich wähle nun die Potenzprodukte m^{ten} Grades

$$P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_k \tag{22}$$

der Variabeln (8) so, daß die ihnen bezüglich entsprechenden Potenzprodukte

$$\Pi_1,\ \Pi_2,\ \cdots,\ \Pi_k \tag{23}$$

der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ gerade die sämtlichen verschiedenen Potenzprodukte vom Grade mn dieser Parameter ausmachen, was nach dem eben bewiesenen Hilfssatze möglich ist. Die Anzahl h wird den Wert

$$h = \binom{mn + r - 1}{r - 1} \tag{24}$$

besitzen. Nun gilt der folgende

Satz I: *Die Potenzprodukte* (22) *bilden ein Restsystem m^{ten} Grades für den Modul* (14).

Daß diese Potenzprodukte mod. M linear unabhängig sind, ergibt sich leicht. Denn da die Formen des Moduls M durch die Substitution (9) identisch verschwinden, so folgt aus der Kongruenz

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_h P_h \equiv 0 \pmod{M}$$

durch Ausführung der Substitution (9)

$$c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + \cdots + c_h\Pi_h = 0$$

und daher
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_h = 0,$$

weil die untereinander verschiedenen Potenzprodukte $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_h$ der Parameter $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ linear unabhängig sind.

Es bleibt zu zeigen, daß jedes Potenzprodukt m^{ten} Grades P mit den Potenzprodukten (22) zusammen mod. M ein abhängiges System bildet. Dies ergibt sich aber unmittelbar aus dem nunmehr zu beweisenden

Satz II: *Zwei Potenzprodukte P und P' der Variabeln* (8) *sind* mod. M *kongruent, wenn die ihnen entsprechenden Potenzprodukte Π und Π' zusammenfallen.*

Denn nach diesem Satze wird jedes beliebig gewählte Potenzprodukt P, dessen entsprechendes Potenzprodukt $\Pi = \Pi_i$ sei, einem der Potenzprodukte (22), nämlich dem P_i, nach dem Modul M kongruent sein.

Der Beweis des Satzes II erfolgt nun wieder durch Induktion.

Im Falle $m = 1$ ist der Satz offenbar richtig. Denn dann ist etwa

$$P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r], \quad P' = [\alpha_1', \alpha_2', \cdots \alpha_r']$$

und wenn nun die entsprechenden Potenzprodukte

$$\Pi = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r}, \quad \Pi' = \xi_1^{\alpha_1'}\xi_2^{\alpha_2'}\cdots\xi_r^{\alpha_r'}$$

zusammenfallen, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_1', \quad \alpha_2 = \alpha_2', \quad \cdots, \quad \alpha_r = \alpha_r',$$

so daß P mit P' identisch wird, also umsomehr $P \equiv P'$ (mod. M) ist.

Sei nun $m > 1$, und es werde vorausgesetzt, daß die Richtigkeit des Satzes II für den Fall, wo $m - 1$ an die Stelle von m tritt, schon bewiesen sei.

Von den beiden Potenzprodukten m^{ten} Grades

$$(25)\quad \begin{cases} P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]\,[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r] \cdots [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r], \\ P' = [\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_r']\,[\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_r'] \cdots [\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_r'] \end{cases}$$

wird also jetzt angenommen, daß die ihnen entsprechenden Potenzprodukte

$$\Pi = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r}\cdot\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\cdots\xi_r^{\beta_r}\cdots\xi_1^{\lambda_1}\xi_2^{\lambda_2}\cdots\xi_r^{\lambda_r},$$
$$\Pi' = \xi_1^{\alpha_1'}\xi_2^{\alpha_2'}\cdots\xi_r^{\alpha_r'}\cdot\xi_1^{\beta_1'}\xi_2^{\beta_2'}\cdots\xi_r^{\beta_r'}\cdots\xi_1^{\lambda_1'}\xi_2^{\lambda_2'}\cdots\xi_r^{\lambda_r'}$$

zusammenfallen, d. h. daß

$$(26)\quad \alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i = \alpha_i' + \beta_i' + \cdots + \lambda_i' \quad (\text{für } i = 1, 2, \cdots, r) \quad \text{sei.}$$

Ersetzt man in P das Produkt

$$(27)\quad [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]\,[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r] \quad \text{durch}$$

$$(28)\quad [\alpha_1, \cdots, \alpha_h + 1, \cdots, \alpha_k - 1, \cdots, \alpha_r]\,[\beta_1, \cdots, \beta_h - 1, \cdots, \beta_k + 1, \cdots, \beta_r],$$

unter h und k zwei verschiedene Indizes der Reihe $1, 2, \cdots, r$ verstanden, so geht hierdurch P in ein neues zu P (mod. M) kongruentes Produkt

(29) $Q=[\alpha_1,\cdots,\alpha_h+1,\cdots,\alpha_k-1,\cdots,\alpha_r][\beta_1,\cdots,\beta_h-1,\cdots,\beta_k+1,\cdots,\beta_r]\cdots[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r]$

über. Denn die Differenz von (27) und (28) ist eine Determinante der Matrix (10) und gehört also dem Modul M an. Hierbei ist indessen $\alpha_k>0$ und $\beta_h>0$ vorauszusetzen, weil die in (28) auftretenden Zahlen α_k-1 und β_h-1 nicht negativ sein müssen.

Es seien nun die beiden ersten Faktoren von P und P' etwa an der h^{ten} Stelle verschieden, d. h. es sei in der Reihe

(30) $$\alpha_1'-\alpha_1,\ \alpha_2'-\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_h'-\alpha_h,\ \cdots,\ \alpha_r'-\alpha_r$$

das Glied $\alpha_h'-\alpha_h$ $(h\leqq r)$ das erste, welches nicht verschwindet, und zwar möge
$$\alpha_h'-\alpha_h>0$$
sein, was angenommen werden darf, weil man andernfalls P und P' in dieser ganzen Betrachtung miteinander vertauschen könnte.

Einerseits folgt nun aus $\alpha_1=\alpha_1',\ \alpha_2=\alpha_2',\ \cdots,\ \alpha_{h-1}=\alpha_{h-1}'$ und
$$n=\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_r'=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r,$$ daß

(31) $$\alpha_h'+\alpha_{h+1}'+\cdots+\alpha_r'=\alpha_h+\alpha_{h+1}+\cdots+\alpha_r$$

ist; andererseits ist nach (26)

(32) $$\alpha_h'+\beta_h'+\cdots+\lambda_h'=\alpha_h+\beta_h+\cdots+\lambda_h.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen geht aber hervor, daß weder die sämtlichen Zahlen $\alpha_{h+1},\cdots,\alpha_r$, noch die sämtlichen Zahlen $\beta_h,\cdots,\lambda_h$ verschwinden können, weil solches $\alpha_h'\leqq\alpha_h$ nach sich ziehen würde.

Da die Faktoren von P noch beliebig angeordnet werden können, darf man annehmen, es sei $\beta_h>0$. Ferner sei etwa $\alpha_k>0$, wo $k>h$ ist.

Läßt man nun an Stelle von P das kongruente Potenzprodukt Q (vgl. (29)) treten, so tritt an die Stelle der Reihe (30) die neue Reihe
$$\alpha_1'-\alpha_1=0,\ \alpha_2'-\alpha_2=0,\ \cdots,\ \alpha_h'-\alpha_h-1,\ \cdots.$$

Ist hier die Zahl $\alpha_h'-\alpha_h-1$ noch positiv, so kann man das Verfahren wiederholen und so lange fortsetzen, bis an die Stelle von P ein kongruentes Potenzprodukt getreten ist, dessen erster Faktor bis zur h^{ten} Stelle inklusive mit dem ersten Faktor von P' übereinstimmt. Es ist klar, daß man durch genügende Wiederholung dieses Verfahrens dahin gelangt, P und P' durch zwei ihnen bezüglich kongruente Potenzprodukte von der Gestalt
$$Q=[\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_r]\bar{P}$$
$$Q'=[\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\cdots,\bar{\alpha}_r]\bar{P}'$$
zu ersetzen, die im ersten Faktor völlig übereinstimmen. Da nun $\bar{P}$ und $\bar{P}'$ vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, so kann auf diese Produkte der zu be-

weisende Satz angewandt werden. Es ist somit $\overline{P} \doteq \overline{P}'$, folglich auch $Q \equiv Q'$ und schließlich $P \equiv P'$ (mod. M), was zu zeigen war.

Aus dem nunmehr bewiesenen Satz I folgt jetzt der auf Seite 315 ausgesprochene Hauptsatz unmittelbar. Für jede beliebige Form F der Variabeln (8) vom m^{ten} Grade gilt nämlich eine Kongruenz der Gestalt

$$F \equiv c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_h P_h \quad (\text{mod. } M), \tag{33}$$

d. h. eine Gleichung der Form

$$F = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_h P_h + A_1 \Phi_1 + \cdots + A_\mu \Phi_\mu.$$

Macht man hierin die Substitution (9) und setzt man überdies voraus, daß hierbei F identisch verschwindet, so kommt

$$0 = c_1 \Pi_1 + c_2 \Pi_2 + \cdots + c_h \Pi_h,$$

folglich $c_1 = c_2 = \cdots = c_h = 0$ und nach (33)

$$F \equiv 0 \quad (\text{mod. } M),$$

womit der Hauptsatz bewiesen ist.

Aus Formel (24) folgt beiläufig noch das Resultat:

„Die Hilbertsche Funktion des Moduls M des Normgebildes wird durch den Binomialkoeffizienten

$$\chi(m) = \binom{mn + r - 1}{r - 1} \qquad \text{dargestellt.“}$$

Zürich, September 1918.

Bemerkungen über die Differente des algebraischen Zahlkörpers.

Von

Michael Bauer in Budapest.

1. Es sei in einem algebraischen Zahlkörper K für die Primzahl p

$$p = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1,$$

wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal bedeutet und noch die Relationen

$$g = p^s g', \quad (p, g') = 1$$

gelten. Ist die Differente des Körpers genau durch $\mathfrak{p}^{v-1}$ teilbar, so hat man

$$v \leqq (s+1)g. \tag{1}$$

Die Formel (1) wurde zuerst von H. Hensel*) in seiner Abhandlung „Über die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen" bewiesen. H. Hilbert**) hatte schon früher im Rahmen seiner Theorie der Galoisschen Körper die Struktur der Differente des Galoisschen Körpers gruppentheoretisch vollständig bestimmt. Er gab auch eine obere Schranke für v, aus der jedoch (1) nicht folgt. Ich möchte zeigen, daß aus den Hilbertschen Untersuchungen die Formel (1) für den Fall Galoisscher Körper sehr leicht gefolgert werden kann.

2. Nun sei G ein Galoisscher Körper n^{ten} Grades. Für die Primzahl p soll die Zerlegung

$$p = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_e)^g, \quad g = p^s g', \quad (p, g') = 1$$

statthaben, wo $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal f^{ten} Grades ist, ein beliebiges der Primideale soll durch $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden. Im Trägheitskörper $\mathfrak{K}$ des $\mathfrak{p}$ ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}^g \tag{2}$$

ein Primideal. Ist ferner π eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare ganze Zahl, welche den Körper G bestimmt, so genügt sie einer Gleichung $f(x) = 0$, wo

$$f(x) = x^g + \alpha x^{g-1} + \cdots + \lambda x + \mu \tag{3}$$

*) Math. Annalen, Bd. 55, S. 301—336. Die Formel (1) läßt sich aus den Resultaten dieser wichtigen Abhandlung entnehmen.

**) Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers. Göttinger Nachrichten 1894, S. 224—236. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper § 47.

im Körper $\mathfrak{K}$ irreduzibel ausfällt und deren Koeffizienten ganze Zahlen desselben Körpers bilden. Da die Relativkonjugierten der Zahl π durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, werden nach (2) die Koeffizienten der Gleichung — 1 ausgenommen — durch Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar sein, deren Grade Vielfache von g bilden. Infolgedessen ist jedes Glied der Summe

$$f'(\pi) = g\pi^{g-1} + (g-1)\alpha\pi^{g-2} + \cdots + \lambda \tag{3*}$$

durch eine andere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Das erste Glied ist durch $\mathfrak{p}^{gs+g-1}$ teilbar, folglich enthält die Differente der Zahl π keine höhere Potenz.

3. Aus dieser Bemerkung folgt die Formel (1). Die Differente von G ist nämlich das Produkt der Relativdifferente des Körpers in bezug auf $\mathfrak{K}$ und der Differente des Trägheitskörpers. Der zweite Faktor ist jedoch relativ prim gegen $\mathfrak{p}$. — (Die Formel (1) läßt sich mutatis mutandis auf Relativkörper ausdehnen.)

Über trigonometrische und harmonische Polynome.

Von

Gabriel Szegö in Budapest.

Es sei $f(\theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ nichtnegativ und im Lebesgueschen Sinne integrabel, ferner

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)},\ \sqrt{f(\theta)}z,\ \cdots,\ \sqrt{f(\theta)}z^n,\ \cdots{}^{*)} \qquad (z = e^{i\theta})$$

und bilde daraus nach E. Schmidt durch Orthogonalisierung ein ganz bestimmtes System

$$\sqrt{f(\theta)}\Phi_0(z),\ \sqrt{f(\theta)}\Phi_1(z),\ \cdots,\ \sqrt{f(\theta)}\Phi_n(z),\ \cdots \qquad (z = e^{i\theta})$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) $\Phi_n(z)$ ist ein Polynom n^{ten} Grades von z.

b) Der Koeffizient von z^n in $\Phi_n(z)$ ist positiv.

c) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, \Phi_m(z)\, \overline{\Phi_n(z)}\, d\theta = \varepsilon_{mn}{}^{**)} \quad (z = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ist z. B. $f(\theta) = 1$, so ist $\Phi_n(z) = z^n$.

Die Polynome $\Phi_n(z)$ hängen sehr eng mit der zu $f(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formenschar***) zusammen und besitzen mehrere inter-

*) Im folgenden sind alle Quadratwurzeln positiv (nichtnegativ) zu nehmen.

**) $\bar{x}$ bedeutet die zu x konjugiert komplexe Größe; $\varepsilon_{mn} = 0$ oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist.

***) O. Toeplitz: a) Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen [Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1907, S. 110—116]; b) Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen [ebenda, 1910, S. 489—506]; c) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der L-Formen [Math. Ann., Bd. 70, 1910, S. 351—376]; d) Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32, 2. Semester 1911, S. 191—192].

essante Eigenschaften. Sie stehen zu den Toeplitzschen Formen in ähnlicher Beziehung, wie die von Heine betrachteten und in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche vorkommenden Polynome*) zu den Hankelschen Formen**).

Eine allgemeine Behandlung dieser Polynome will ich anderswo auseinandersetzen. Ich beschränke mich hier nur auf den Spezialfall

$$(1) \qquad f(\theta) = p(\theta, r) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{1 - r^2}{|z - r|^2} \qquad (z = e^{i\theta};\ 0 < r < 1),$$

in welchem sie direkt und in einfacher Form aufzuschreiben sind. Mit Hilfe dieser Formeln gebe ich dann die Lösung zweier Extremumaufgaben über trigonometrische Polynome, die im Falle $r = 0$ von Herrn L. Fejér behandelt worden sind.***) Hieraus ergeben sich mehrere Ungleichungen über harmonische Polynome.

---

1. Es sei r eine feste Zahl, für welche $0 < r < 1$ ist und

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z), \cdots$$

bezeichne das eindeutig bestimmte System von Polynomen mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom n^{ten} Grades von z.

b) Der Koeffizient von z^n in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

c) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\, \varphi_m(z)\, \overline{\varphi_n(z)}\, d\theta = \varepsilon_{mn} \qquad (z = e^{i\theta};\ m, n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ich behaupte, daß

$$(\varphi) \qquad \varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{z^{n-1}(z - r)}{\sqrt{1 - r^2}} \qquad (n \geq 1)$$

ist. In der Tat, die Bedingungen a) und b) sind zunächst erfüllt. Ferner

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\, z^n\, d\theta = r^{|n|} \qquad (z = e^{i\theta};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\, |\varphi_0(z)|^2\, d\theta = 1,$$

---

*) O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen 1913, S. 375—388.

**) Ich bezeichne als Hankelsche Formen diejenigen quadratischen Formen, deren Determinante eine Hankelsche ist.

***) L. Fejér: Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, 1916, S. 53—82].

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\overline{\varphi_0(z)}\,\varphi_n(z)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\frac{z^n - r z^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta = 0$$

und
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\overline{\varphi_m(z)}\,\varphi_n(z)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^{n-m}\,d\theta = \varepsilon_{mn}$$

$$(z = e^{i\theta};\ m, n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Aus (φ) ergeben sich unmittelbar die Umkehrungsformeln:

$$(\varphi^{-1})\quad 1 = \varphi_0(z),\quad z^n = r^n\varphi_0(z) + \sqrt{1-r^2}\,[r^{n-1}\varphi_1(z) + \cdots + \varphi_n(z)]\quad (n \geqq 1).$$

2. Bevor ich weitergehe, führe ich hier einen Fejérschen Satz an*), der in der Folge eine besonders wichtige Rolle spielen wird. Das ist:

Die Gesamtheit der Funktionen von der Form

$$|x_0 + x_1 z + \cdots + x_n z^n|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

wo $x_0, x_1, \cdots, x_n$ beliebige komplexe (reelle) Konstanten bezeichnen, stimmt mit der Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen (Kosinus-)Polynome n^{ter} Ordnung überein.

Aus (φ) und (φ^{-1}) folgt nun unmittelbar der Satz:

Die Gesamtheit der Funktionen von der Form

$$(2)\qquad |x_0\varphi_0(z) + x_1\varphi_1(z) + \cdots + x_n\varphi_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

wo $x_0, x_1, \cdots, x_n$ beliebige komplexe (reelle) Konstanten bezeichnen, stimmt mit der Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen (Kosinus-)Polynome n^{ter} Ordnung überein.

Dieser Satz wird als Ausgangspunkt unserer Beweisführungen dienen.

3. Herr Fejér hat in seiner oben zitierten Arbeit folgendes Theorem bewiesen**):

Es sei $\varphi(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung mit dem absoluten Gliede 1, d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,d\theta = 1.$$

Dann ist
$$\varphi(\theta) \leqq n + 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

*) A. a. O. S. 62—64. Wie Herr Fejér dort bemerkt, rührt der erste Beweis des Satzes von Herrn F. Riesz her.

**) A. a. O. S. 64—66.

und das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{n+1}|1 + z + \cdots + z^n|^2 \qquad [z = e^{i(\theta-\theta_0)}]$$

und $\theta = \theta_0$ *ist*)* (θ_0 *ist beliebig*).

Ich beweise hier den folgenden Satz:

Es sei $0 < r < 1$ *und* $\varphi(\theta)$ *ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom* n^{ter} *Ordnung, für welches*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\varphi(\theta)\,d\theta = 1 \tag{3}$$

ist. Dann ist

$$p(\theta, r)\varphi(\theta) \leqq n + \frac{1+r}{1-r} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta) = \frac{1+r}{n+1-r(n-1)}\left|1 + \frac{z-r}{1+r}\,\frac{z^n-1}{z-1}\right|^2 \qquad (z = e^{i\theta}) \tag{5}$$

und $\theta = 0$ *ist.*

Für $\lim r = 0$ reduziert sich die Ungleichung (4) auf die Fejérsche und das trigonometrische Polynom (5) auf

$$\frac{1}{n+1}|1 + z + \cdots + z^n|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Beweis: Es sei $n \geqq 1$. (Für $n = 0$ ist der Satz trivial.) Ich setze nach (2)
$$\varphi(\theta) = |x_0\varphi_0(z) + x_1\varphi_1(z) + \cdots + x_n\varphi_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$
wo $x_0, x_1, \cdots, x_n$ beliebige komplexe Konstanten bezeichnen. Die Bedingung (3) ist dann vollständig gleichbedeutend mit der folgenden:

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1. \tag{3'}$$

Man hat nun nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\varphi(\theta) \leqq |\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \cdots + |\varphi_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Es ist aber
$$p(\theta, r)|\varphi_0(z)|^2 = p(\theta, r) \leqq \frac{1+r}{1-r} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$
und
$$p(\theta, r)|\varphi_x(z)|^2 = 1 \quad (z = e^{i\theta};\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi;\ x \geqq 1),$$
also
$$p(\theta, r)\varphi(\theta) \leqq n + \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi), \quad \text{q. e. d.}$$

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so muß zunächst $\theta = 0$ sein, da sonst
$$p(\theta, r) < \frac{1+r}{1-r}$$
ist. Es ist aber
$$p(0, r) = \frac{1+r}{1-r}$$

*) D. h. $\theta \equiv \theta_0$ (mod. 2π).

und
$$\varphi(0) = \left|x_0 + \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}(x_1 + \cdots + x_n)\right|^2,$$
also
$$\left|x_0 \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + x_1 + \cdots + x_n\right|^2 = n + \frac{1+r}{1-r},$$
während die Bedingung (3′) erfüllt ist. Daraus folgt
$$x_0 = \lambda \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}, \qquad x_\varkappa = \lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n),$$
wo
$$|\lambda|^2 \left(n + \frac{1+r}{1-r}\right) = 1$$
ist; also
$$\varphi(\theta) = \frac{1}{n + \frac{1+r}{1-r}} \left|\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \cdots + \varphi_n(z)\right|^2$$
$$= \frac{1+r}{n+1-r(n-1)}\left|1 + \frac{z-r}{1+r}\,\frac{z^n-1}{z-1}\right|^2 \qquad (z = e^{i\theta}).$$

4. Ich benutze dieses Theorem, um einen Satz über harmonische Polynome zu beweisen.

Es sei $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnug. Es sei ferner
$$\text{Max. } \varphi(\theta, r) = M(r) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$
$$\text{Min. } \varphi(\theta, r) = m(r) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$
und $M(r) - m(r) = \Omega(r)$. *Dann ist für* $0 < r < 1$

$$M(r) \leqq M(1) - \frac{1-r}{1+r}\,\frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}} \tag{6}$$
und
$$m(r) \geqq m(1) + \frac{1-r}{1+r}\,\frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}}; \tag{7}$$
das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn $\varphi(\theta, r) =$ const. ist.

Dieses Theorem gibt eine Verschärfung der für jede harmonische Funktion gültigen Ungleichungen
$$M(r) \leqq M(1) \quad \text{bzw.} \quad m(r) \geqq m(1).$$
Für $\lim r = 0$ reduziert es sich auf einen Satz von Fejér.*)

Beweis: Es sei $0 < r < 1$. Ich schließe den Fall $\varphi(\theta, r) =$ const. aus, so daß
$$M(r) < M(1), \quad m(r) > m(1)$$
und
$$\Omega(1) > \Omega(r) > 0 \quad \text{ist. Ich setze dann in (4)}$$
$$\varphi(\theta) = \frac{M(1) - \varphi(\theta + \theta_0, 1)}{M(1) - M(r)},$$

*) A. a. O. S. 69—70.

wo θ_0 das Argument bezeichnet, für welches

$$\varphi(\theta_0, r) = M(r)$$

ist; $\varphi(\theta)$ ist offenbar ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\,d\theta = 1,$$

da ja

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,d\theta = 1$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta + \theta_0, 1)\,d\theta = \varphi(\theta_0, r) = M(r)$$

ist. Also

$$p(\theta, r)\,\frac{M(1) - \varphi(\theta + \theta_0, 1)}{M(1) - M(r)} \leqq n + \frac{1+r}{1-r} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi).$$

Es sei nun

$$\varphi(\theta_1, 1) = m(1),$$

so ergibt sich

$$p(\theta_1 - \theta_0, r)\,\frac{\Omega(1)}{M(1) - M(r)} \leqq n + \frac{1+r}{1-r},$$

also

$$\frac{1-r}{1+r}\,\frac{\Omega(1)}{M(1) - M(r)} \leqq n + \frac{1+r}{1-r},$$

woraus

$$M(r) \leqq M(1) - \frac{1-r}{1+r}\,\frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}} \tag{6}$$

folgt.

Schließen wir, wie gesagt, den Fall $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ aus, so ist in (6) das Gleichheitszeichen niemals gültig. In der Tat, nach Punkt 3 könnte das nur dann eintreten, wenn $\theta_0 = \theta_1$ ist. Nun ist andererseits

$$p(0, r) = \frac{1+r}{1-r} > \frac{1-r}{1+r},$$

so daß in (6) immer das Zeichen $<$ gilt.

Ähnlich beweist man die Ungleichung (7).

Folgerung: *Es sei $\varphi(\theta, r)$ ein harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung. Dann ist mit Behaltung der früheren Bezeichnungen*

$$M(r_1) \leqq M(r_2) - \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\,\frac{\Omega(r_2)}{n + \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}} \tag{6'}$$

und

$$m(r_1) \geqq m(r_2) + \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\,\frac{\Omega(r_2)}{n + \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}} \qquad (0 < r_1 < r_2); \tag{7'}$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ ist.

5. Herr Fejér hat ebenfalls in seiner früher zitierten Arbeit folgenden Satz bewiesen*):

Es sei $\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives Kosinuspolynom n^{ter} Ordnung $(n \geqq 1)$ mit dem absoluten Gliede 1, *d. h.*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = 1.$$

Dann ist
$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta\, d\theta \leqq \frac{1}{2};$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn
$$\varphi(\theta) = 1 \pm \cos n\theta \qquad \textit{ist.}$$

Ich beweise hier das folgende Theorem:

Es sei $0 < r < 1$ und $\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives Kosinuspolynom n^{ter} Ordnung $(n \geqq 1)$, für welches

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\varphi(\theta)\, d\theta = 1$$
ist. Dann ist

$$(9) \qquad -\frac{1-r^n}{2} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\, \varphi(\theta) \cos n\theta\, d\theta \leqq \frac{1+r^n}{2};$$

das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn
$$\varphi(\theta) = \frac{1+\cos n\theta}{1+r^n} \quad \textit{bzw.} \quad \varphi(\theta) = \frac{1-\cos n\theta}{1-r^n} \qquad \textit{ist.}$$

Beweis: Ich setze nach (2)
$$\varphi(\theta) = |\alpha_0\varphi_0(z) + \alpha_1\varphi_1(z) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(z)|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$
wo $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ beliebige *reelle* Konstanten bezeichnen. Die Bedingung (8) ist dann mit der folgenden gleichbedeutend:

$$(8') \qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1.$$

Es gelten nun die Formeln

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,|\varphi_0(z)|^2 z^n\, d\theta = r^n,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,|\varphi_n(z)|^2 z^n\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\frac{|z-r|^2}{1-r^2} z^n\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^n\, d\theta = 0,$$

*) A. a. O. S. 72.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi_\varkappa(z)\,\overline{\varphi_{\varkappa'}(z)}\,z^n\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z^{\varkappa-\varkappa'+n}\,d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi_\varkappa(z)\,\overline{\varphi_0(z)}\,z^n\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\frac{z^{n+\varkappa} - r z^{n+\varkappa-1}}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\overline{\varphi_\varkappa(z)}\,\varphi_0(z)\,z^n\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\frac{z^{n-\varkappa} - r z^{n-\varkappa+1}}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta = r^{n-\varkappa}\sqrt{1-r^2}$$

$$(z = e^{i\theta};\ \varkappa, \varkappa' = 1, 2, \cdots, n;\ n \geqq 1).$$

Man hat also

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\,z^n\,d\theta$$

$$= r^n \alpha_0^2 + \sum_{\varkappa=1}^{n} r^{n-\varkappa}\sqrt{1-r^2}\,\alpha_0\alpha_\varkappa \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Meine Aufgabe ist nun, das Maximum und Minimum dieser quadratischen Form zu bestimmen, während die Veränderlichen der Bedingung

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1$$

unterworfen sind. Zu diesem Zwecke bestimme ich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$L_n(-\mu) = L_n(x) = \begin{vmatrix} r^n + x & p r^{n-1} & p r^{n-2} & \cdots & p \\ p r^{n-1} & x & 0 & \cdots & 0 \\ p r^{n-2} & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix},$$

wo

$$\mu = -x, \quad p = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2}$$

ist. Ich bezeichne die Determinanten, die $L_n(x)$ durch Weglassen der letzten, der zwei letzten usw. Reihen und Kolonnen entstammen, bzw. mit $L_n^{(1)}(x)$, $L_n^{(2)}(x)$, usw. Dann ist

$$L_n(x) = L_n^{(0)}(x) = x L_n^{(1)}(x) - p^2 x^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n^{(\varkappa-1)}(x) = x L_n^{(\varkappa)}(x) - p^2 r^{2\varkappa-2} x^{n-\varkappa}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n^{(n-1)}(x) = x L_n^{(n)}(x) - p^2 r^{2n-2}$$

und

$$L_n^{(n)}(x) = r^n + x.$$

Ich addiere nun diese Gleichungen, nachdem ich die $\varkappa^{\text{te}}$ mit $x^{\varkappa-1}$ multipliziert habe ($\varkappa = 1, 2, \cdots, n$). So ergibt sich

$$\begin{aligned} L_n(-\mu) = L_n(x) &= x^{n-1}\left[x(r^n + x) - \frac{1-r^{2n}}{4}\right] \\ &= x^{n-1}\left[\left(x + \frac{r^n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \\ &= (-\mu)^{n-1}\left(\frac{1+r^n}{2} - \mu\right)\left(\frac{r^n - 1}{2} - \mu\right). \end{aligned}$$

Sind also die Eigenwerte der Form (10)

$$\mu_0^{(n)} \leqq \mu_1^{(n)} \leqq \cdots \leqq \mu_n^{(n)},$$

so ist
$$\mu_0^{(n)} = -\frac{1-r^n}{2}, \quad \mu_n^{(n)} = \frac{1+r^n}{2}$$

und für $n \geqq 2$
$$\mu_1^{(n)} = \mu_2^{(n)} = \cdots = \mu_{n-1}^{(n)} = 0.$$

Daraus folgt die Ungleichung (9).

Die obere Grenze $\mu_n^{(n)}$ wird für ein Wertsystem $\alpha_\varkappa = \alpha_{\varkappa n}$ ($\varkappa = 0, 1, \cdots, n$) erreicht, definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (r^n - \mu_n^{(n)})\,\alpha_{0n} + p r^{n-1}\alpha_{1n} + \cdots + p\,\alpha_{nn} &= 0, \\ p r^{n-1}\alpha_{0n} - \mu_n^{(n)}\alpha_{1n} \qquad\qquad &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p\,\alpha_{0n} \qquad\qquad - \mu_n^{(n)}\alpha_{nn} &= 0, \\ \alpha_{0n}^2 + \alpha_{1n}^2 + \cdots + \alpha_{nn}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt
$$\alpha_{\varkappa n} = \frac{p r^{n-\varkappa}}{\mu_n^{(n)}}\,\alpha_{0n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und
$$\frac{1}{\alpha_{0n}^2} = 1 + \frac{p^2}{\mu_n^{(n)2}}\,\frac{1-r^{2n}}{1-r^2} = \frac{2}{1+r^n},$$

d. h.
$$\alpha_{0n}^2 = \frac{1+r^n}{2}.$$

Also
$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= |\alpha_{0n}\varphi_0(z) + \alpha_{1n}\varphi_1(z) + \cdots + \alpha_{nn}\varphi_n(z)|^2 \\ &= \frac{1+r^n}{2}\left|1 + \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{p r^{n-\varkappa}}{\mu_n^{(n)}}\,\frac{z^{\varkappa-1}(z-r)}{\sqrt{1-r^2}}\right|^2 \\ &= \frac{|1+z^n|^2}{2(1+r^n)} = \frac{1+\cos n\theta}{1+r^n} \qquad (z = e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich, daß die untere Grenze $\mu_0^{(n)}$ nur dann erreicht wird, wenn $\alpha_\varkappa = \alpha'_{\varkappa n}$ ($\varkappa = 0, 1, \cdots, n$) ist, wo

$$\alpha'_{\varkappa n} = \frac{p r^{n-\varkappa}}{\mu_0^{(n)}}\,\alpha'_{0n} \quad \text{und} \quad \alpha_{0n}'^2 = \frac{1-r^n}{2}$$

ist, woraus
$$\varphi(\theta) = \frac{1 - \cos n\theta}{1 - r^n}$$
folgt. Damit ist unser Satz völlig bewiesen.

6. Ich wende diese Betrachtungen auf harmonische Polynome an. Es sei $n \geqq 1$, $0 < r < 1$,
$$\varphi(\theta) = t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} t_\kappa \cos \kappa\theta \geqq 0 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$
und
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\,d\theta = t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} t_\kappa r^\kappa = 1.$$
Man hat für alle $\kappa = 1, 2, \cdots, n$
$$\cos n\theta \cos \kappa\theta = \frac{1}{2}[\cos(n+\kappa)\theta + \cos(n-\kappa)\theta],$$
also
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta = t_0 r^n + \sum_{\kappa=1}^{n} t_\kappa (r^{n+\kappa} + r^{n-\kappa})$$
$$= \frac{r^n}{2}\Big(t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} t_\kappa r^\kappa\Big) + \frac{r^n}{2}\Big(t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{t_\kappa}{r^\kappa}\Big)$$
$$= \frac{r^n}{2} + \frac{r^n}{2}\Big(t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{t_\kappa}{r^\kappa}\Big).$$
So ist die Ungleichung (9) mit der folgenden gleichbedeutend:
$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{r^n}{2}\Big(t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{t_\kappa}{r^\kappa}\Big) \leqq \frac{1}{2},$$
d. h.
$$\Big| t_0 + 2\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{t_\kappa}{r^\kappa} \Big| \leqq \frac{1}{r^n};$$
das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn
$$\varphi(\theta) = \frac{1 \pm \cos n\theta}{1 \pm r^n},$$
d. h. wenn
$$t_0 = \frac{1}{1 \pm r^n}, \qquad t_n = \frac{\pm\frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$
und für $n \geqq 2$
$$t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0$$
ist.

Ich kann hiermit dem Satze (9) folgende Fassung geben:

Es sei $0 < r < 1$, $n \geqq 1$,

$$\varphi(\theta) = t_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} t_\varkappa \cos \varkappa\theta \geqq 0 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

ferner

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta)\,d\theta = t_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} t_\varkappa r^\varkappa = 1. \qquad \textit{Dann ist}$$

$$\text{(11)} \qquad \left| t_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{t_\varkappa}{r^\varkappa} \right| \leqq \frac{1}{r^n}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$t_0 = \frac{1}{1+r^n}, \qquad t_n = \frac{\pm\frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$

und für $n \geqq 2$ $\qquad t_1 = t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0 \qquad$ *ist.*

7. Ich beweise jetzt folgendes Theorem:

Es sei $\varphi(\theta, r)$ *ein beliebiges harmonisches Polynom* n^{ter} *Ordnung, das für* $r \leqq 1$ *nichtnegativ ist. Dann gilt die Ungleichung*

$$\text{(12)} \qquad \left|\varphi\left(\theta, \frac{1}{r}\right)\right| \leqq \frac{\varphi(\theta, r)}{r^n} \qquad (0 < r < 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi);$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, r) = \alpha[1 + r^n \cos n(\theta - \beta)]$$

und $\theta = \beta + \frac{\varkappa\pi}{n}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$ *ist. Hier bezeichnen* α *und* β *beliebige reelle Konstanten* $(\alpha \geqq 0)$.*)

In der Tat, sei x ein fester Wert von θ und $0 < r < 1$. Ich setze voraus, daß $\varphi(\theta, r)$ nicht identisch verschwindet; dann ist $\varphi(x, r) > 0$. Ich setze in dem eben bewiesenen Satze

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(x+\theta, 1) + \varphi(x-\theta, 1)}{\varphi(x, r)} = t_0(x) + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} t_\varkappa(x) \cos \varkappa\theta.$$

Das ist ein nichtnegatives Kosinuspolynom in θ, welches der Bedingung (8) genügt, da ja die Formel gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(x+\theta, 1)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(x-\theta, 1)\,d\theta = \varphi(x, r).$$

*) Ist $\alpha = 0$, so findet natürlich für alle θ Gleichheit statt.

Ich setze $$\varphi(\theta, r) = a_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} r^{\varkappa}(a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta),$$

dann ist $$\varphi(x+\theta, 1) = a_0$$
$$+ 2\sum_{\varkappa=1}^{n} [(a_\varkappa \cos \varkappa x + b_\varkappa \sin \varkappa x) \cos \varkappa\theta + (b_\varkappa \cos \varkappa x - a_\varkappa \sin \varkappa x) \sin \varkappa\theta]$$

und so $$t_0(x) = \frac{a_0}{\varphi(x, r)}, \quad t_\varkappa(x) = \frac{a_\varkappa \cos \varkappa x + b_\varkappa \sin \varkappa x}{\varphi(x, r)} \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n).$$

Ferner
$$t_0(x) + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{t_\varkappa(x)}{r^\varkappa} = \frac{1}{\varphi(x, r)}\left[a_0 + 2\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{r^\varkappa}(a_\varkappa \cos \varkappa x + b_\varkappa \sin \varkappa x)\right]$$
$$= \frac{\varphi\left(x, \frac{1}{r}\right)}{\varphi(x, r)},$$

also nach (11) $$\left|\varphi\left(x, \frac{1}{r}\right)\right| \leqq \frac{\varphi(x, r)}{r^n},$$ q. e. d.

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so ist
$$t_0(x) = \frac{a_0}{\varphi(x, r)} = \frac{1}{1 \pm r^n}, \quad t_n(x) = \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\varphi(x, r)} = \frac{\pm\frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$

und für $n \geqq 2$
$$t_\varkappa(x)\,\varphi(x, r) = a_\varkappa \cos \varkappa x + b_\varkappa \sin \varkappa x = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n-1).$$

D. h. für $n = 1$ $\quad \varphi(x+\theta, 1) = \alpha(1 \pm \cos\theta)$ $\quad$ und für $n \geqq 2$
$$\varphi(x+\theta, 1) = \alpha\left(1 \pm \cos n\theta + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} u_\varkappa \sin \varkappa\theta\right),$$

wo $\alpha \geqq 0$ und die $u_\varkappa$ gewisse reelle Zahlen bezeichnen.

Aus der Ungleichung
$$1 \pm \cos n\theta + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} u_\varkappa \sin \varkappa\theta \geqq 0 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

folgt aber offenbar $$\left|\sum_{\varkappa=1}^{n-1} u_\varkappa \sin \varkappa\theta\right| \leqq 1 \pm \cos n\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

so daß das Sinuspolynom $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung auf der linken Seite, für alle Nullstellen von $1 \pm \cos n\theta$, die sämtlich zweifach sind, ebenfalls verschwindet, und zwar wenigstens von der zweiten Ordnung. (Das ist geometrisch klar.) Es verschwindet also identisch, d. h.
$$\varphi(x + \theta, 1) = \alpha(1 \pm \cos n\theta).$$

und so $\qquad \varphi(\theta, r) = \alpha[1 \pm r^n \cos n(\theta - x)]$.

Daraus ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß $\cos n(\theta - x) = \pm 1$ und so $\theta = x + \frac{\varkappa\pi}{n}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$ ist.

Folgerung: *Es sei $\varrho > 0$ eine feste Zahl und $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, das für $r \leqq \varrho$ nichtnegativ ist. Dann gilt die Ungleichung*

$$(12') \qquad \left|\varphi\left(\theta; \frac{\varrho^2}{r}\right)\right| \leqq \varphi(\theta, r)\left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \qquad (0 < r < \varrho;\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi);$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, r) = \alpha\left[1 + \frac{r^n}{\varrho^n}\cos n(\theta - \beta)\right]$$

und $\theta = \beta + \frac{\varkappa\pi}{n}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$ ist. Hier sind α und β beliebige reelle Konstanten $(\alpha \geqq 0)$.[*])

8. Aus (12) folgt weiter der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung und

$$|\varphi(\theta, r)| \leqq 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi;\ r \leqq 1),$$

so ist

$$(13) \qquad |\varphi(\theta, R)| \leqq R^n \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi;\ R > 1).$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi(\theta, r) = r^n \cos n(\theta - \beta)$$

und $\theta = \beta + \frac{\varkappa\pi}{n}$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$ ist (β ist beliebig).

In der Tat, für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ und $r \leqq 1$

$$\frac{1 + \varphi(\theta, r)}{2} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 - \varphi(\theta, r)}{2} \geqq 0,$$

also nach (12)
$$|\varphi(\theta, R)| = \left|\frac{1 + \varphi(\theta, R)}{2} - \frac{1 - \varphi(\theta, R)}{2}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{1 + \varphi(\theta, R)}{2}\right| + \left|\frac{1 - \varphi(\theta, R)}{2}\right|$$
$$\leqq R^n \frac{1 + \varphi\left(\theta, \frac{1}{R}\right)}{2} + R^n \frac{1 - \varphi\left(\theta, \frac{1}{R}\right)}{2} = R^n, \quad \text{q. e. d.}$$

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so muß zunächst

$$\frac{1 + \varphi(\theta, r)}{2} = \alpha[1 + r^n \cos n(\theta - \beta)] \qquad (\alpha \geqq 0)$$

---

[*]) Man vgl. Fußnote [*]) S. 11.

sein; also $$\varphi(\theta, r) = a + br^n \cos n(\theta - \beta),$$
wo $b \geqq 0$ und $|a| + b \leqq 1$. Es ist ferner $\theta = \beta + \frac{\varkappa\pi}{n}$, d. h.
$$|a + (-1)^\varkappa b R^n| = R^n.$$
Daraus folgt $a = 0$, $b = 1$ und so
$$\varphi(\theta, r) = r^n \cos n(\theta - \beta).$$

Aus (13) ergibt sich der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein harmonisches Polynom, das nicht identisch verschwindet und
$$V(r) = \text{Max.}\, |\varphi(\theta, r)| \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$
so ist
$$\frac{V(r_2)}{V(r_1)} \leqq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \qquad (0 < r_1 < r_2) \tag{14}$$
und das Gleichheitszeichen ist hier nur für
$$\varphi(\theta, r) = \alpha r^n \cos n(\theta - \beta)$$
gültig ($\alpha \neq 0$ und β sind beliebig).

Diese Ungleichung sagt eigentlich gar nichts anderes aus, als daß
$$\frac{V(r)}{r^n}$$
mit wachsendem r nicht zunimmt. Der analoge Satz für Polynome ist fast unmittelbar klar. In der Tat, wenn $P(z)$ ein Polynom n^{ten} Grades der komplexen Veränderlichen z bezeichnet, so ist für $r > 0$
$$\frac{1}{r^n} \underset{|z|=r}{\text{Max.}} |P(z)| = \underset{|z|=r}{\text{Max.}} \left|\frac{P(z)}{z^n}\right| = \underset{|z|=\frac{1}{r}}{\text{Max.}} \left|z^n P\left(\frac{1}{z}\right)\right|,$$
woraus, da das Polynom $z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ für jedes z regulär ist,
$$\frac{1}{r_1^n} \underset{|z|=r_1}{\text{Max.}} |P(z)| \geqq \frac{1}{r_2^n} \underset{|z|=r_2}{\text{Max.}} |P(z)| \qquad (0 < r_1 < r_2)$$
folgt. Gleichheit tritt hier nur für
$$P(z) = cz^n$$
ein.

9. Zum Schluß will ich zeigen, wie der Satz (13) mit dem sog. Bernsteinschen Satz über trigonometrische Polynome zusammenhängt. Der lautet folgendermaßen:

Ist $\varphi(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung und
$$|\varphi(\theta)| \leqq 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$
so ist
$$|\varphi'(\theta)| \leqq n \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi);$$
das Gleichheitszeichen ist hier nur für
$$\varphi(\theta) = \cos n(\theta - \beta)$$
gültig.

Dieser Satz hat eine ziemlich ausgedehnte Literatur.*) Ich beweise hier mit Hilfe von (13), daß

$$|\varphi'(\theta)| < \frac{2e}{\pi} n \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \quad \text{ist.}$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist das klar. Es sei also $n \geqq 2$. Ich setze für $r \leqq 1$

$$\varphi(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta - \alpha, r)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Das ist ein harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, für welches

$$|\varphi(\theta, r)| \leqq 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi;\ r \leqq 1)$$

ist. Es gilt ferner für $0 < r < 1$ die Gleichung

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta - \alpha, r)\, \varphi\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) d\alpha,$$

also

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p'(\theta - \alpha, r)\, \varphi\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) d\alpha,$$

wenn ich kurz

$$\frac{\partial p(\theta, r)}{\partial \theta} = p'(\theta, r)$$

schreibe. Hieraus folgt nach (13)

$$|\varphi'(\theta)| \leqq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |p'(\theta - \alpha, r)|\, d\alpha = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |p'(\alpha, r)|\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{2r(1-r^2)\,|\sin\alpha|}{(1 - 2r\cos\alpha + r^2)^2}\, d\alpha = \frac{2(1-r^2)}{\pi r^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1 - 2rx + r^2)^2} = \frac{4}{\pi r^{n-1}(1-r^2)},$$

also

$$|\varphi'(\theta)| \leqq \frac{4}{\pi r^{n-1}(1-r^2)}.$$

Nun ist hier r, abgesehen von der Einschränkung $0 < r < 1$, ganz beliebig; ich bekomme die beste Abschätzung, wenn ich

$$r = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

---

*) S. Bernstein: Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné [Mémoire couronné par la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1912, S. 19—20]; M. Riesz: Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique [Comptes Rendus, Bd. 158, 1914, S. 1152]; F. Riesz: Sur les polynomes trigonométriques [ebenda, Bd. 158, 1914, S. 1657]; M. Fekete: Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein [Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, 1916, S. 88—94].

setze. So folgt $$|\varphi'(\theta)| \leqq \frac{2}{\pi} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Es ist aber $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e$$

und, wie eine elementare Rechnung bestätigt

$$\frac{1}{n} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} < e \qquad (n \geqq 2),$$

also $$|\varphi'(\theta)| < \frac{2e}{\pi} n, \qquad \text{q. e. d.}$$

Wien, im August 1918.

Bemerkung.

Während der Korrektur dieser Arbeit ist es mir gelungen, die Ungleichungen (6) und (7) bedeutend zu verschärfen. Es gilt der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein nicht konstantes harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, so ist mit Behaltung der Bezeichnungen in Punkt 4

$$(\overline{6}) \qquad M(r) \leqq M(1) - \frac{\Omega(1)}{1+n\frac{1+r}{1-r}} \quad \textit{und}$$

$$(\overline{7}) \qquad m(r) \geqq m(1) + \frac{\Omega(1)}{1+n\frac{1+r}{1-r}};$$

das Gleichheitszeichen ist in $(\overline{6})$ bzw. $(\overline{7})$ dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, 1) = \alpha + \beta \frac{1-r}{n+1+r(n-1)} \left| 1 - \frac{z-r}{1-r} \frac{1-(-z)^n}{1+z} \right|^2 \quad [z = e^{i(\theta-\theta_0)}]$$

ist (α und θ_0 ist hier beliebig, $\beta < 0$ bzw. > 0).

Beweis: Es gilt zunächst der folgende Satz:

Ist $\varphi(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung, welches die Bedingung (3) erfüllt, so ist

$$(\overline{4}) \qquad \varphi(\theta) \leqq 1 + n\frac{1+r}{1-r}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\text{(5)} \qquad \varphi(\theta) = \frac{1-r}{n+1+r(n-1)}\left|1 - \frac{z-r}{1-r}\,\frac{1-(-z)^n}{1+z}\right|^2 \qquad (z = e^{i\theta})$$

und $\theta = \pi$ *ist.*

Die Ungleichung $(\bar{4})$ ergibt sich ähnlicherweise, wie die Ungleichung (4). Aus $(\bar{4})$ folgt nun mit wörtlicher Wiederholung des Verfahrens in Punkt 4 die gewünschte Ungleichung $(\bar{6})$.

Um die Fälle zu ermitteln, wo in $(\bar{6})$ bzw. $(\bar{7})$ das Gleichheitszeichen gilt, schicke ich den folgenden Hilfssatz voraus:

Die Wurzeln des Polynoms

$$1 - \frac{z-r}{1-r}\,\frac{1-(-z)^n}{1+z}$$

liegen alle am Rande des Einheitskreises.

Ist nämlich $z = -\zeta$ eine von diesen, so ist $\zeta \neq 1$ und

$$(1-r)(1-\zeta) + (\zeta + r)(1-\zeta^n) = 0,$$

d. h.

$$\frac{1+r\zeta}{\zeta+r} = \zeta^n.$$

Nun ist bekanntlich für $|\zeta| < 1$

$$\left|\frac{1+r\zeta}{\zeta+r}\right| > 1 > |\zeta^n| \quad \text{und für } |\zeta| > 1 \quad \left|\frac{1+r\zeta}{\zeta+r}\right| < 1 < |\zeta^n|,$$

woraus die Behauptung folgt. Das Minimum des trigonometrischen Polynoms $(\bar{5})$ ist somit gleich 0.

Ist nun in $(\bar{6})$ das Gleichheitszeichen gültig, so muß (s. Punkt 4)

$$\frac{M(1) - \varphi(\theta+\theta_0, 1)}{M(1) - M(r)} = \varphi(\theta) \quad \text{und} \quad \theta_1 - \theta_0 = \pi$$

sein, wo $\varphi(\theta)$ das trigonometrische Polynom $(\bar{5})$ bezeichnet. D. h.

$$\varphi(\theta, 1) = \alpha + \beta\,\varphi(\theta - \theta_0) \qquad (\beta < 0), \quad \text{q. e. d.}$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(\theta, 1)$ diese Form hat, so ist

$$M(1) = \alpha, \quad m(1) = \alpha + \beta\left(1 + n\frac{1+r}{1-r}\right), \quad \Omega(1) = -\beta\left(1 + n\frac{1+r}{1-r}\right)$$

und

$$M(r) \geqq \varphi(\theta_0, r)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta, r)\,\varphi(\theta+\theta_0, 1)\,d\theta = \alpha + \beta = M(1) - \frac{\Omega(1)}{1 + n\dfrac{1+r}{1-r}};$$

in $(\bar{6})$ gilt also wirklich das Gleichheitszeichen.

Ähnlich behandelt man die Ungleichung $(\bar{7})$.

Wien, im Oktober 1918.

Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale.

Von

Hans Rademacher in Wickersdorf (Thüringen).

Ist $f(x)$ eine in einem Gebiet G der xy-Ebene definierte stetige Funktion mit *stetigen* partiellen Ableitungen, so ist diese Funktion bekanntlich im Stolzschen Sinne differenzierbar, d. h. es ist

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \sqrt{h^2+k^2}\cdot R(h, k),$$

wenn $R(h, k) \leqq S(\sqrt{h^2+k^2})$ und $S(\sqrt{h^2+k^2}) \to 0$ mit $h^2+k^2 \to 0$.*)

Aus dieser Gleichung schließt man, daß eine durch zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

vermittelte eineindeutige Abbildung von G auf ein Gebiet Γ der $\xi\eta$-Ebene im Unendlichkleinen affin ist. Durch Vergleich dieser Abbildung mit einer affinen folgert man daraus, daß der Betrag der Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right|$$

in jedem Punkte (x, y) das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung darstellt. Von hier aus gelangt man dann zu der Transformationsformel für Doppelintegrale

$$\iint\limits_{\Gamma} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{G} F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right| dx\, dy.$$

Diese Schlußweisen sollen nun in der vorliegenden Arbeit auf Funktionen übertragen werden, die nur einer erweiterten Lipschitzschen Bedingung

*) Bei jeder *totalstetigen* Funktion zweier Variabeln findet übrigens Differenzierbarkeit im Stolzschen Sinne wenigstens in einem maßgleichen Kern von G statt; siehe C. Carathéodory, Reelle Funktionen (Leipzig 1918), S. 661, Satz 7. Dieses Buch wird im Folgenden mit R. F. zitiert.

unterworfen sind. Dabei werden wir auf dem Wege noch einige an sich bemerkenswerte Sätze über die Funktionaldeterminante selbst beweisen. Anstelle von „Differenzierbarkeit im Stolzschen Sinne" werden wir im folgenden auch kurz von „totaler Differenzierbarkeit" sprechen. Wir bemerken noch, daß wir alle Sätze nur der Einfachheit halber für *zwei* Variable formulieren; die Beweise lassen sich ohne weiteres auch auf mehr Variable übertragen.

I. Partielle und totale Differenzierbarkeit.

1. In dem beschränkten Gebiete G der xy-Ebene sei die Funktion $f(x, y)$ definiert. Wir führen dann ein

see (4) below

$$(1) \quad w_f(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \frac{|f(x+h, y+k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{für } 0 < h^2 + k^2 \leqq \varrho^2.$$

Hiernach ist $w_f(x, y; \varrho)$ bei festem x, y eine mit abnehmendem ϱ nicht wachsende Funktion. Es existiert also

$$(2) \qquad L_f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0} w_f(x, y; \varrho).$$

Über $f(x, y)$ setzen wir nun voraus, daß $L_f(x, y)$ in G *endlich* und *summierbar* sei. Die Endlichkeit von L_f impliziert offenbar die Stetigkeit von f.*)

Die $f(x,y)$ auferlegte Bedingung kann als eine Erweiterung der Lipschitzschen Bedingung aufgefaßt werden. Denn diese wird ausgedrückt durch

$$(3) \qquad \left|\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right| < M, \quad \left|\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\right| < M \qquad h, k \neq 0,$$

wo M eine in G konstante endliche Zahl ist. Aus (3) folgt aber leicht

$$(4) \qquad \frac{|f(x+h, y+k) - f(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}} < 2M$$

und also auch $\qquad L_f(x, y) \leqq 2M,$

so daß L_f dann endlich und in dem beschränkten Gebiet G summierbar ist. Für die Erfüllung von (3) ist bekanntlich wieder notwendig und hinreichend, daß die partiellen Derivierten von $f(x, y)$ beschränkt sind.**)

Wir setzen jedoch zunächst nur Endlichkeit und Summierbarkeit, nicht Beschränktheit von L_f voraus. Nun ist

*) Die *Meßbarkeit* von $L_f(x, y)$ ist eine Folge ihrer Endlichkeit, da L_f durch die Stetigkeit von f eine Funktion der zweiten Baireschen Klasse auf G wird.

**) R. F. S. 551, Satz 9.

$$\text{obere Grenze von} \left|\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}\right|$$

$$\leqq \text{obere Grenze von} \left|\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

$$0 < h^2 + k^2 \leqq \varrho^2, \quad h \neq 0,$$ also auch

(5a) $$|D_x f(x,y)| \leqq L_f(x,y),$$

worin $D_x f(x, y)$ irgend eine der vier partiellen Hauptderivierten nach x bedeute. Ebenso gilt

(5b) $$|D_y f(x,y)| \leqq L_f(x,y).$$

Die partiellen Hauptderivierten von $f(x, y)$ sind also in G endlich und summierbar. Ist dann E_{y_0} die lineare offene Punktmenge, die die Gerade $y = y_0$ mit G gemeinsam hat, so existiert nach einem bekannten Satz von G. Fubini*) außer für eine lineare Nullmenge der y_0 das Integral

(6) $$\int\limits_{E_{y_0}} D_x f(x, y_0)\, dx.$$

Dies hat aber zur Folge, daß in jedem E_{y_0}, in dem (6) existiert, auch außer höchstens in einer linearen Nullmenge die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ existiert.**) Daraus ergibt sich, daß $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ in einem maßgleichen Kern K_1 von G existieren muß. Denn die vier partiellen Hauptderivierten nach x sind meßbare Funktionen und können daher nur in einer meßbaren Menge voneinander abweichen. Da diese Menge aber von allen Geraden $y = y_0$ mit Ausnahme einer linearen Nullmenge der y_0 in linearen Nullmengen geschnitten wird, so ist sie, wie eine Anwendung des Fubinischen Satzes zeigt, selbst eine zweidimensionale Nullmenge.***)

Nach analogen Überlegungen existiert $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ebenfalls in einem maßgleichen Kern K_2 von G; beide gemeinsam also in dem maßgleichen Kern $K = K_1 \cdot K_2$.

2. Nun sei λ eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es wegen der Meßbarkeit und Endlichkeit von L_f eine meßbare Teilmenge $H \prec K$, so daß

$$mH > mK - \lambda = mG - \lambda$$

ist und für jeden Punkt (x, y) in H

(7) $$L_f(x,y) < M(\lambda)$$

ist, wo $M(\lambda)$ nicht von (x, y) abhängt.

---

*) G. Fubini, Sugli integrali multipli (Rend. della R. Accademia dei Lincei 1907), auch R. F. S. 632, Satz 4.

**) R. F. S. 597, Satz 4 zusammen mit S. 545, Satz 2.

***) R. F. S. 628, Satz 3.

Nach einem Konvergenzsatze aus der Lebesgueschen Theorie der Meßbarkeit*) gibt es nun in H eine meßbare Teilmenge S mit

$$mS > mH - \lambda > mG - 2\lambda,$$

so daß in S die *Konvergenz* von

$$w_f(x, y; \varrho) \to L_f, \quad \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial y}$$

gleichmäßig stattfindet. Es gibt also ein $\varrho_0(\lambda)$, so daß für jedes (x, y) in S

$$(8) \qquad w_f(x, y; \varrho) < L_f + M(\lambda) < 2M(\lambda) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq \varrho_0(\lambda);$$

und es gibt zu jedem beliebig vorgeschriebenen positiven ε ein $h_0(\lambda, \varepsilon)$, so daß in S

$$(9) \qquad \left.\begin{aligned} \left|\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| < \varepsilon \\ \left|\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \text{ für } 0 < |h| \leqq h_0(\lambda, \varepsilon).$$

In S als einer meßbaren Menge von positivem Maße gibt es nun eine *perfekte* Teilmenge T, deren Maß um weniger als λ unter dem von S bleibt**):

$$(10) \qquad mT > mS - \lambda > mG - 3\lambda.$$

In T sind nun $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ *stetig.* Denn es sei $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen, so konvergieren die Folgen der in T *stetigen* Funktionen von (x, y)

$$\frac{f(x+h_n, y) - f(x, y)}{h_n}, \quad \frac{f(x, y+h_n) - f(x, y)}{h_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

in T gleichmäßig gegen $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}$, so daß also auch diese Limites auf T stetig sind. Auf der *perfekten* Menge T sind sie dann aber auch gleichmäßig stetig***), d. h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\bar{h}(\varepsilon)$, so daß

$$(11) \qquad \left|\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial x}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y}\right| < \varepsilon,$$

wenn nur $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \bar{h}(\varepsilon)$. [Bemerkung zur Schreibweise: $\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x}$ soll bedeuten, daß zunächst $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ gebildet und darin dann $x = x_1$, $y = y_1$ gesetzt wird.]

Ferner hat T als meßbare Menge von positivem Maß fast überall die

*) R. F. S. 382, Satz 12, doch bedarf für unsere Anwendung dieser Satz samt seinem Beweis einer leicht anzubringenden Erweiterung für den Fall des Grenzüberganges in einem *stetigen* Parameter.

**) R. F. S. 288, Satz 12.

***) R. F. S. 205, Satz 2.

Dichte 1.*) Das soll heißen: Ist $K(P; r)$ der Kreis mit dem Radius r um den Punkt $P = (x, y)$ von T, und ist $T(P; r)$ der Durchschnitt von T und $K(P; r)$, so ist diejenige Teilmenge E von T, in der

$$\lim_{r \to 0} \frac{m\,T(P; r)}{m\,K(P; r)} = 1$$

gilt, ein maßgleicher Kern von T,

(12) $$E \prec T, \quad mE = mT.$$

Ist daher $N > 1$ eine positive ganze Zahl, so gibt es zu dem Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ von E, in dem wir die Funktion auf ihre totale Differenzierbarkeit hin untersuchen wollen, eine positive Zahl $r_N(P_0)$, so daß für $r < r_N(P_0)$

$$\frac{m\,T(P_0; r)}{m\,K(P_0; r)} > 1 - \frac{1}{N^2}$$

stattfindet. Bedeutet dann $E(P_0; r)$ den Durchschnitt von E und $K(P_0; r)$, so muß wegen (12) bei $r < r_N(P_0)$ zugleich

(13) $$\frac{m\,E(P_0; r)}{m\,K(P_0; r)} > 1 - \frac{1}{N^2}$$ sein.

Zu der beliebigen positiven Zahl λ haben wir die Teilmenge E von G konstruiert, so daß

(14) $$mE > mG - 3\lambda$$

ist. Zu λ haben wir die positiven Zahlen $M(\lambda)$ und $\varrho_0(\lambda)$ angegeben und zu der beliebigen positiven Zahl ε ferner die Zahlen $h_0(\varepsilon, \lambda)$ und $\bar{h}(\varepsilon)$ bestimmt, welche Zahlen sämtlich für ganz E Gültigkeit besitzen. Zu der beliebigen natürlichen Zahl N haben wir endlich für den Punkt P_0 in E ein $r_N(P_0)$ angegeben. Dann sei r_0 eine positive Zahl, die

(15) $$r_0 < h_0(\lambda, \varepsilon), \quad r_0 < \bar{h}(\varepsilon), \quad r_0 < r_N(P_0)$$

genügt. Um P_0 denken wir uns den Kreis $K(P_0; r_0)$ mit dem Radius r_0 geschlagen.

3. In $K(P_0; r_0)$ sei P_1 mit den Koordinaten

(16) $$\begin{cases} x_1 = x_0 + h_1 \cos \alpha_1 \\ y_1 = y_0 + h_1 \sin \alpha_1 \end{cases}$$

irgend ein von P_0 verschiedener Punkt, für den nur noch

(17a) $$0 < h_1 < r_0 \frac{N-1}{N}$$

(17b) $$h_1 < \varrho_0(\lambda)(N-1)$$

*) Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, Annales de l'École Normale Supérieure 1910 (3), Bd. 27, S. 399—401. Auch R. F. S. 497, Satz 3. Die Dichte ist aufzufassen als eine verallgemeinerte Derivierte des unbestimmten Integrals derjenigen summierbaren Funktion, die auf T gleich 1 und auf $G - T$ gleich 0 ist.

vorausgesetzt wird. In dem Kreis um P_0 mit dem Radius $h_1 \frac{N}{N-1}$ muß wegen (13), (17a) und der dritten Ungleichung (15) das Maß der zu E komplementären Punktmenge weniger als $\frac{h_1^2 \pi}{(N-1)^2}$ betragen. Ein Kreis um P_1 mit dem Radius $\frac{h_1}{N-1}$, der wegen (16) und (17a) ganz in $K(P_0; r_0)$ liegt, muß also Punkte von E in seinem Innern enthalten; es sei P_2 ein solcher Punkt mit den Koordinaten x_2, y_2, so daß mithin

$$(18) \qquad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \frac{h_1}{N-1}$$

ist (P_2 darf übrigens mit P_1 zusammenfallen).

Wir bilden nun den Differenzenquotienten

$$(19) \qquad \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{h_1} + \frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{h_1} + \frac{f(x_0, y_2) - f(x_0, y_0)}{h_1}.$$

Die Brüche der rechten Seite schätzen wir nacheinander ab. Ist P_2 mit P_1 identisch, so verschwindet der erste Bruch. Sonst ist wegen (1) und (18)

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \leqq w_f\left(x_2, y_2; \frac{h_1}{N-1}\right),$$

und folglich unter Berücksichtigung von (8) und (17b)

$$(20) \qquad \left|\frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)}{h_1}\right| < 2M(\lambda) \cdot \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{h_1} < \frac{2M(\lambda)}{N-1},$$

was auch für zusammenfallende P_1 und P_2 gültig bleibt.

Führt man noch
$$x_2 = x_0 + h_2 \cos \alpha_2$$
$$y_2 = y_0 + h_2 \sin \alpha_2$$
ein, so kann man für den zweiten Bruch schreiben

$$(21) \qquad \frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{h_1} = \frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{x_2 - x_0} \frac{h_2}{h_1} \cos \alpha_2.$$

Nun ist, da P_2 in E liegt und $|x_2 - x_0| < h_0(\lambda, \varepsilon)$ ist, wegen (9)

$$\left|\frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{x_2 - x_0} - \frac{\partial f(x_0, y_2)}{\partial x}\right| < \varepsilon,$$

ferner auch wegen $|y_2 - y_0| < \bar{h}(\varepsilon)$ nach (11)

$$\left|\frac{\partial f(x_0, y_2)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right| < \varepsilon,$$

so daß zusammengenommen

$$(22) \qquad \frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{x_2 - x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \eta_1$$

sich ergibt, wo $\qquad |\eta_1| < 2\varepsilon \qquad$ ist.

Ferner ist nach dem Satz über die Differenz zweier Seiten im Dreieck unter Berücksichtigung von (18)

$$|h_2 - h_1| < \frac{h_1}{N-1} \quad \text{oder}$$

$$\frac{h_2}{h_1} = 1 + \eta_2, \quad |\eta_2| < \frac{1}{N-1}. \tag{23}$$

Endlich ist $\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 = 2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$,

$$|\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1| \leqq 2\left|\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right|.$$

Nun ersieht man aus dem Dreieck $P_0 P_1 P_2$ ohne weiteres

$$\sin|\alpha_2 - \alpha_1| < \frac{h_1}{N-1} : h_1 = \frac{1}{N-1},$$

woraus

$$|\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1| < \frac{2}{N-1} \quad \text{und somit}$$

$$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 + \eta_3, \quad |\eta_3| < \frac{2}{N-1} \tag{24}$$

folgt. Für (21) erhält man also mit Hilfe von (22), (23), (24)

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2, y_2) - f(x_0, y_2)}{h_1} &= \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \eta_1\right)(1 + \eta_2)(\cos\alpha_1 + \eta_3) \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha_1 + \Theta(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned} \tag{25}$$

wo $\Theta(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ mit η_1, η_2, η_3 gegen Null strebt. Es lassen sich aber η_1, η_2, η_3 beliebig klein machen, indem man nur ε hinreichend klein und N hinreichend groß bestimmt, was man durch hinreichend kleines r_0 und damit hinreichend kleines h_1 erreichen kann, also $\Theta \to 0$ mit $h_1 \to 0$.

Endlich schätzt man den dritten Bruch rechts in (19) nach demselben Verfahren ab, was noch einfacher gelingt als bei dem zweiten Bruch, weil man nicht die durch (11) ausgesprochene gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf E heranzuziehen braucht. Man erhält dann

$$\frac{f(x_0, y_2) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha_1 + \Theta',$$

wo wieder Θ' mit h_1 gegen Null strebt. Zusammen mit (20) und (25) ergibt sich für (19), wenn man noch die Bezeichnungen (16) wieder aufnimmt,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h_1\cos\alpha_1, y_0 + h_1\sin\alpha_1) - f(x_0, y_0)}{h_1} &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha_1 \\ &+ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha_1 + R(h_1; \alpha_1), \end{aligned} \tag{26}$$

wo $\lim R(h_1; \alpha_1) = 0$ für $h_1 \to 0$, was, wie unsere Abschätzungen zeigen, gleichmäßig in α_1 gilt. Setzt man

$$h_1 \cos \alpha_1 = h, \quad h_1 \sin \alpha_1 = k,$$

so kann man für (26) schreiben

$$(27) \quad f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \sqrt{h^2+k^2}\, R(h, k),$$

$$|R(h, k)| < S(\sqrt{h^2+k^2}),$$

$$\text{wo } \lim S(\sqrt{h^2+k^2}) = 0 \quad \text{mit} \quad \sqrt{h^2+k^2} \to 0.$$

Im Punkte $P_0 = (x_0, y_0)$ ist $f(x, y)$ also *total (nach Stolz) differenzierbar.*

Nun war P_0 ein beliebiger Punkt von E; in ganz E ist also $f(x, y)$ von derselben Eigenschaft. Wir lassen nun λ der Reihe nach die Werte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ durchlaufen. Zu jedem dieser Werte bestimmen wir eine Menge E, die für $\lambda = \frac{1}{n}$ mit E_n bezeichnet werden möge, so daß nach (14)

$$(28) \qquad mE_n > mG - \frac{3}{n}$$

ist. Es sei E^* die Vereinigungsmenge aller E_n. Dann ist in E^* überall $f(x, y)$ total differenzierbar, da jeder Punkt von E^* zu mindestens einem E_n gehört, in dem diese Eigenschaft der Funktion nachgewiesen ist. Anderseits folgt aus (28) $\quad mE^* = mG,$

so daß wir folgenden Satz aussprechen können:

Satz I. *Ist $f(x, y)$ eine in dem beschränkten Gebiete G der xy-Ebene definierte Funktion, für welche die aus*

$$(1) \qquad w_f(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \frac{|f(x+h, y+k) - f(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\text{für } 0 < h^2 + k^2 \leqq \varrho^2,$$

$$(2) \qquad L_f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0} w_f(x, y; \varrho)$$

entspringende Funktion $L_f(x, y)$ in G endlich und summierbar ist, so ist $f(x, y)$ in einem maßgleichen Kern von G total (im Stolzschen Sinne) differenzierbar.

4. Die Überlegungen im Anfang von § 1 haben dargetan, daß für die Endlichkeit und Summierbarkeit von $L_f(x, y)$ die Beschränktheit der partiellen Derivierten von $f(x, y)$ in G hinreichend ist. Wir haben somit das

Korollar: *Eine in einem Gebiete G der xy-Ebene definierte Funktion $f(x, y)$ mit beschränkten partiellen Derivierten ist in einem maßgleichen Kern vor G total (im Stolzschen Sinne) differenzierbar.**)

---

*) Eine solche Funktion zweier Variabeln braucht nach einem Beispiel von C. Carathéodory (R. F. S. 655) nicht totalstetig zu sein. Vgl. S. 340 Anm. *).

Selbst wenn aber, was in diesem Korollar nicht einmal vorausgesetzt ist, die Funktion $f(x, y)$ *überall* in G partielle Ableitungen besitzt, die beschränkt sind, braucht sie darum doch nicht überall total differenzierbar zu sein. Das zeigt das folgende einfache Beispiel

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{für} \quad x^2+y^2>0,$$
$$f(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad x^2+y^2=0.$$

Leichte Rechnungen zeigen, daß überall

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqq 2, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqq 2 \qquad \text{und daß}$$

(29) $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}} = 0, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}} = 0$$

ist. Dagegen haben wir

$$f(h\cos\alpha, h\sin\alpha) = h\sin^2\alpha\cos\alpha$$

und folglich $$\frac{df(h\cos\alpha, h\sin\alpha)}{dh} = \sin^2\alpha\cos\alpha,$$

was mit (29) zusammen zeigt, daß für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ in diesem Falle (26) nicht erfüllt ist.

II. Eigenschaften der Funktionaldeterminante.

5. Nach dem Beweis unseres Satzes I schlagen wir den in der Einleitung skizzierten Weg ein. Aus (27) erhält man zunächst durch die Substitution $$h = at, \quad k = bt$$

(30) $$\frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(x_0, y_0)}{t} = a\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} + \sqrt{a^2+b^2}\,R(at, bt).$$

Nun seien

(31) $$x = x(s), \quad y = y(s)$$

zwei differenzierbare Funktionen (deren Ableitungen übrigens nicht beschränkt zu sein brauchen), deren Werte x und y für ein gewisses Intervall $s_1 < s < s_2$ in das Definitionsgebiet G von $f(x, y)$ fallen mögen. Wir betrachten einen Punkt $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$, der zur Menge E^* gehört, falls es einen solchen gibt. In diesem Punkte seien $x'(s_0)$ und $y'(s_0)$ die Ableitungen der Funktionen (31). Dann gilt in einer linearen Umgebung um s_0:

$$x(s) = x_0 + (x'(s_0) + \delta_1)(s - s_0),$$
$$y(s) = y_0 + (y'(s_0) + \delta_2)(s - s_0),$$

worin $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$ mit $s \to s_0$. Für hinreichend kleines $(s - s_0)$ schließt man daher aus (30) auf

$$\frac{f(x(s), y(s)) - f(x_0, y_0)}{s - s_0} = (x'(s) + \delta_1) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y'(s_0) + \delta_2) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

$$+ \sqrt{(x'(s_0) + \delta_1)^2 + (y'(s_0) + \delta_2)^2}\, R((x' + \delta_1)(s - s_0), (y' + \delta_2)(s - s_0)),$$

woraus im Limes $s \to s_0$

$$\left.\frac{d f(x(s), y(s))}{ds}\right|_{s = s_0} = x'(s_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + y'(s_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{32}$$

hervorgeht. Diese Gleichung gilt für ganz beliebige differenzierbare Funktionen $x(s)$, $y(s)$ (deren Werte in G liegen) außer in einer durch die Funktion $f(x, y)$ völlig bestimmten Nullmenge ($G - E^*$) der (x, y).*) Die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ könnten also, ohne den Gültigkeitsbereich von (32) zu ändern, noch einen Parameter enthalten. Es seien

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

zwei in einem Gebiet Γ der $\xi\eta$-Ebene definierte Funktionen, deren Funktionswerte x, y in G hineinfallen und die in Γ überall partielle Ableitungen nach ξ und η besitzen, über deren Beschränktheit wir nichts voraussetzen. Dann gelten analog zu (32)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{\partial \xi} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \dfrac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \dfrac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{\partial f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))}{\partial \eta} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} \dfrac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \dfrac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{cases} \tag{33}$$

außer in einer Nullmenge $G - E^*$ der (x, y). Ist $g(x, y)$ eine weitere Funktion in G, die dort gleichfalls den Voraussetzungen von Satz I genügt, so gelten (33) und die analogen Formeln für $g(x, y)$ zugleich in allen Punkten von G außer in einer durch $f(x, y)$ und $g(x, y)$ bestimmten Nullmenge, die Z heißen möge.

Aus (33) und den analogen Gleichungen für $g(x, y)$ erhält man den Multiplikationssatz der Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\[1ex] \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\[1ex] \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\[1ex] \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\[1ex] \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Satz II. *Sind $f(x, y)$ und $g(x, y)$ zwei in einem Gebiet G der xy-Ebene den Voraussetzungen von Satz I genügende Funktionen und $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ zwei in einem Gebiet Γ der $\xi\eta$-Ebene definierte partiell differenzierbare Funktionen, deren Funktionswerte (x, y) in das Gebiet G fallen, so gilt die Multiplikationsformel* (34) *der Funktionaldeterminanten außer in*

*) Es wäre denkbar, daß diese Nullmenge die ganze Kurve (31) enthielte, so daß die Formel (32) für keinen einzigen Wert von s zu gelten brauchte.

einer Nullmenge Z der (x, y) in G, die nur von $f(x, y)$ und $g(x, y)$, nicht von der Wahl der Funktionen $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ abhängt.

Über das Maß der Punktmenge der (ξ, η) in Γ, in der (34) nicht gilt, werden wir unter gewissen Einschränkungen nachher noch eine Aussage machen können.

6. Durch die Funktionen

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

die wieder die im vorigen Absatz diskutierten Eigenschaften haben sollen, wird das Gebiet G der xy-Ebene auf einen Bereich U der uv-Ebene eindeutig abgebildet. Da diese Abbildung jedoch keine eindeutige Umkehrung zu besitzen braucht, so braucht U kein Gebiet zu sein.

Die Gleichung (27) liefert in der Umgebung eines Punktes P_0, in dem sowohl $f(x, y)$ als auch $g(x, y)$ total differenzierbar ist,

$$(35)\quad \begin{cases} u = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + k\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \qquad\qquad + \sqrt{h^2 + k^2}\, R(h, k) \\ v = g(x_0 + h, y_0 + k) = g(x_0, y_0) + h\dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + k\dfrac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \qquad\qquad + \sqrt{h^2 + k^2}\, R'(h, k). \end{cases}$$

Die Abbildung ist also im Unendlichkleinen um P_0 affin. Würden die Restglieder in (35) fehlen, so würde durch die dann hervorgehende affine Abbildung

$$(36)\quad \begin{cases} \bar{u} = f_0 + h\dfrac{\partial f}{\partial x} + k\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \bar{v} = g_0 + h\dfrac{\partial g}{\partial x} + k\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{cases}$$

das Quadrat Q in G

$$(37)\quad x_0 - l \leqq x \leqq x_0 + l, \qquad y_0 - l \leqq y \leqq y_0 + l$$

auf ein Parallelogramm $\bar{V}$ abgebildet werden.

Wir erledigen zunächst den Fall

$$(38)\quad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Dann artet das Parallelogramm $\bar{V}$ in eine Strecke $\bar{A}$ aus, deren Mittelpunkt das Bild von P_0 ist; verschwinden jedoch sämtliche Ableitungen, so wird Q durch die affine Transformation nur auf einen Punkt abgebildet. Die Länge a der Bildstrecke $\bar{A}$ ist der größere der beiden Abstände der Bilder gegenüberliegender Ecken von Q. Diese Bildabstände sind bzw.

$$2l\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \quad \text{und} \quad 2l\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2},$$

und wegen (5a) und (5b) ist folglich

$$a \leqq 2l\sqrt{8L_f(x_0, y_0)^2} < 6lL_f, \tag{39}$$

worunter auch der Fall, daß $\overline{V}$ in einen Punkt ausartet, mit einbegriffen ist.

Der Vergleich von (35) und (36) zeigt, daß zwei zu demselben Wertepaar (h, k) gehörende Punkte (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ einen kleineren Abstand als $\sqrt{h^2+k^2}\,R^*\sqrt{2}$ voneinander haben, wo R^* der größere der beiden absoluten Beträge $|R|$ und $|R'|$ ist und daher $R^* \to 0$ mit $h^2+k^2 \to 0$. Also liegt das durch (35) von Q entworfene Bild V ganz in der Menge der Punkte, die von $\bar{A}$ höchstens den Abstand $2lR_l^*$ haben, wo R_l^* der Maximalwert von R^* in dem Quadrat Q und den Seitenlängen $2l$ sei, so daß also auch $R_l^* \to 0$ mit $l \to 0$ gilt. Diese Punktmenge (sie besteht aus einem Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen) hat aber wegen (39) einen kleineren Inhalt als

$$24l^2L_fR_l^* + 4l^2R_l^{*2}\pi,$$

also ist auch das Maß von V kleiner als diese Zahl. Folglich

$$\frac{mV}{mQ} < (6L_f + \pi R_l^*)R_l^*,$$

woraus für $\operatorname{Lim} l = 0$ das *Vergrößerungsverhältnis* $\Delta(P_0)$ der Abbildung im Punkte P_0 folgt: $\qquad \Delta(P_0) = 0.$

Im Falle (38) ist also in einem Punkt von totaler Differenzierbarkeit der f und g das Vergrößerungsverhältnis gleich dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante.

Nehmen wir nun

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{40}$$

an, so ist $\overline{V}$ ein Parallelogramm mit nicht zusammenfallenden Seiten und mit dem Bild von P_0 als Mittelpunkt. Die Parallelogrammseiten werden einen kleinsten mit l proportionalen Abstand μl vom Mittelpunkte haben. Ich wähle nun l von vornherein so klein, daß $4R_l^* < \mu$ ist. Das durch (35) vom Rande des Quadrates Q entworfene Bild sei die Kurve C. Da jeder Punkt von C vom Rande von $\overline{V}$ höchstens einen Abstand $d = 2lR_l^*$ haben kann, so liegt C ganz in einem ringartigen Streifen, der die Breite $2d$ hat und den Mittelpunkt von $\overline{V}$ umschließt, aber nicht enthält. Ein Parallelogramm $\overline{V}_{-d}$ also, das ganz in $\overline{V}$ liegt und dessen Seiten parallel zu denen von $\overline{V}$ im Abstand d verlaufen, enthält keinen Punkt von C. Ein Parallelogramm $\overline{V}_{+d}$, dessen Seiten außerhalb von $\overline{V}$ parallel zu den Seiten von $\overline{V}$ im Abstande d liegen, enthält anderseits C ganz im Innern.

Wir behaupten nun, daß sämtliche Punkte von $\overline{V}_{-d}$ Bilder von Punkten von Q bei der Abbildung (35) sind. Durchläuft nämlich der Punkt $(\bar{h}, k)$ einmal den Rand von Q, so tut $(\bar{u}, \bar{v})$ das Gleiche auf dem Rande von $\overline{V}$, und (u, v) durchläuft C. Dabei umkreist $(\bar{u}, \bar{v})$ einmal einen beliebigen Punkt P^* in $\overline{V}_{-d}$ und (u, v) gleichfalls, da (u, v) von $(\bar{u}, \bar{v})$ innerhalb eines Kreises vom Radius d und dem Mittelpunkt $(\bar{u}, \bar{v})$ mitherumgeschleppt wird. Deformiert sich C stetig, so kann sich die Umlaufungszahl nur ändern, wenn C durch P^* geht. Wir ziehen nun den Quadratrand von Q stetig auf den Punkt P_0 zusammen, wobei C stetig deformiert wird. Geht dabei einmal C durch P^*, so ist P^* gewiß Bild eines Punktes von Q. Tritt dies nie ein, so umläuft C stets P^*. Da sich aber C zugleich mit dem Quadratrand auf einen Punkt zusammenzieht, so muß P^* der Grenzpunkt von C und also das Bild von P_0 sein. In jedem Falle ist folglich ein beliebiger Punkt P^* von $\overline{V}_{-d}$ Bild eines Punktes von Q.*)

---

*) Der hier für diese Behauptung gegebene Beweis ist der einzige der vorliegenden Arbeit, der an der Dimensionszahl 2 hängt. Für n Dimensionen zieht man am besten den Begriff der „Ordnung" eines Punktes in Bezug auf eine geschlossene Fläche und den Kroneckerschen „Index" eines Funktionensystems auf einer geschlossenen Fläche heran. (Siehe hierzu die Note von J. Hadamard „Sur quelques applications de l'indice de Kronecker" in J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, t. 2^e, éd. 2^e, Paris 1910). Ich skizziere den allgemeinen Beweis. Durch

$$\text{(A)} \quad u_i = f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \cdots x_n + h_n) = f_i(x_1, x_2, \cdots x_n) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + r \cdot R_i,$$

$$\text{wo } r^2 = \sum_j h_j^2 \text{ und } R_i \to 0 \text{ mit } r \to 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n,$$

wird der Würfel W

$$|h_i| < l$$

mit dem Mittelpunkt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ auf einen Bereich V abgebildet. (Vorausgesetzt ist nicht-verschwindende Funktionaldeterminante). Die Transformation

$$\bar{u}_i = f_i + \sum_j h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

bildet dagegen W auf ein Parallelepiped $\overline{V}$ mit der Oberfläche $\overline{S}$ ab. Man bestimmt $\overline{V}_{-d}$ wie im Text. Jeder Punkt von $\overline{V}_{-d}$ hat in bezug auf $\overline{S}$ die Ordnung 1 (l. c. S. 460, § 28). Die Oberfläche von W wird auf eine (ganz außerhalb $\overline{V}_{-d}$ liegende) Fläche S abgebildet, in bezug auf die jeder Punkt von $\overline{V}_{-d}$ dieselbe Ordnung hat wie in bezug auf $\overline{S}$ (l. c. S. 462 ff., § 30). Die Ordnung des Punktes $(u_1^*, u_2^*, \ldots u_n^*)$ in $\overline{V}_{-d}$ in Bezug auf S ist aber nichts anderes als der Kroneckersche Index des Funktionensystems

$$f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - u_i^* \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

Somit überdeckt V ganz $\overline{V}_{-d}$ und wird selbst von $\overline{V}_{+d}$ überdeckt, so daß man hat:

$$m\overline{V}_{-d} \leqq mV \leqq m\overline{V}_{+d}. \tag{41}$$

Durch eine bekannte elementare Rechnung erschließt man aus (36) und (37)

$$m\overline{V} = 4l^2|D|.$$

Die offenbar mit l proportionalen und wegen (40) nicht verschwindenden Abstände von je zwei Gegenseiten von $\overline{V}$ seien $2\mu l$ und $2\nu l$ (wo μ und ν Ausdrücke in den Koeffizienten der Transformation (36) sind). Das Parallelogramm $\overline{V}_{+d}$, dessen Seitenabstände je um $2d = 4lR_i^*$ größer sind als die von $\overline{V}$, hat mithin den Inhalt

$$m\overline{V}_{+d} = 4l^2|D|\left(1 + \frac{2R_i^*}{\mu}\right)\left(1 + \frac{2R_i^*}{\nu}\right),$$

und analog gilt für $\overline{V}_{-d}$

$$m\overline{V}_{-d} = 4l^2|D|\left(1 - \frac{2R_i^*}{\mu}\right)\left(1 - \frac{2R_i^*}{\nu}\right).$$

Hieraus und aus (41) ergibt sich dann

$$|D|\left(1 - \frac{2R_i^*}{\mu}\right)\left(1 - \frac{2R_i^*}{\nu}\right) \leqq \frac{mV}{mQ} \leqq |D|\left(1 + \frac{2R_i^*}{\mu}\right)\left(1 + \frac{2R_i^*}{\nu}\right),$$

und folglich ist für Limes $l = 0$ auch in diesem Fall das Vergrößerungsverhältnis $\Delta(P_0)$ der Abbildung gleich dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante

$$\Delta(P_0) = |D| = \left|\frac{D(f, g)}{D(x, y)}\right|.$$

Dies gilt für alle Punkte P_0 in G außer denen der Nullmenge Z, in denen mindestens eine der beiden Funktionen nicht total differenzierbar ist. Wir haben damit den folgenden Satz gewonnen:

Satz III. *Die im Gebiete G definierten, den Bedingungen des Satzes I genügenden Funktionen $u = f(x, y)$ und $v = g(x, y)$ vermitteln eine eindeutige Abbildung des Gebietes G der xy-Ebene auf einen Bereich U der uv-Ebene. Dann ist in dem maßgleichen Kern von G in dem $f(x, y)$ und $g(x; y)$ zugleich total differenzierbar sind, das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung gleich dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante.*

Daß übrigens selbst bei *eineindeutigen* Abbildungen die Funktionaldeterminante, auch wenn sie überall in G existiert, doch nicht überall

---

auf der Oberfläche von W. Dieses Funktionensystem ist in W und auf seiner Oberfläche *stetig* definiert. Wegen des nicht verschwindenden Index müssen seine Funktionen eine gemeinsame Nullstelle in W haben (l. c. S, 466, § 33). Also ist jeder Punkt von $\overline{V}_{-d}$ durch (A) Bild mindestens eines Punktes von W.

das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung zu sein braucht, habe ich früher durch ein Beispiel gezeigt.*)

Bei einer eineindeutigen stetigen Abbildung eines Gebietes wird entweder der Umlaufungssinn in jedem Punkte aufrecht erhalten oder in jedem Punkte umgekehrt. Unsere Überlegungen zeigen nun zugleich, daß das *Vorzeichen* der Funktionaldeterminante dort, wo sie nicht verschwindet, fast überall angibt, ob die Abbildung den Umlaufungssinn erhält oder umkehrt. Denn bekanntlich kann man dies bei einer affinen Transformation aus dem Vorzeichen der Determinante entnehmen, und mit affinen Transformationen haben wir fast überall unsere Abbildung vergleichen können.

Satz IV. *Die Funktionaldeterminante einer eineindeutigen Abbildung, die im übrigen die Voraussetzungen von Satz III erfüllt, nimmt auf dem maßgleichen Kern von G, in dem f und g beide total differenzierbar sind, entweder nicht das negative oder nicht das positive Zeichen an, ersteres, wenn die Abbildung den Umlaufungssinn aufrechterhält, letzteres, wenn sie ihn umkehrt.***)

7. Im folgenden soll Satz II noch eine Ergänzung erfahren. Wir stellen zunächst noch zwei Eigenschaften einer solchen Abbildung fest, welche durch die der Lipschitzschen Bedingung (3) und somit auch (4) genügenden Funktionen $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ vermittelt sind. Vorausgesetzt wird also

$$\frac{|f(x+h, y+k) - f(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}} < M', \quad \frac{|g(x+h, y+k) - g(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}} < M'$$

und folglich auch

$$\sqrt{(f(x+h, y+k) - f(x, y))^2 + (g(x+h, y+k) - g(x, y))^2} < M'\sqrt{2}\sqrt{h^2+k^2}. \tag{42}$$

Dann gilt der

Hilfssatz 1: *Ist W eine beliebige Menge in G, so gilt für das Bild W^* in U*

$$\overline{m}\, W^* \leq 2 M'^2\, \overline{m}\, W,$$

wo $\overline{m}$ das äußere Maß bezeichnen soll.

Man kann nämlich W mit abzählbar vielen Kreisen K restlos so überdecken, daß

$$\sum m K < \overline{m}\, W + \varepsilon$$

*) Eineindeutige Abbildungen und Meßbarkeit, Göttinger Diss. 1917, S. 107f. (auch Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 27, 1916, S. 288 f.) Im Folgenden zitiert als Dissertation.

**) Für mehr als zwei Dimensionen wäre hier statt des Umlaufungssinns eine allgemeiner definierte „Indikatrix" zu nehmen.

für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist.*) Wegen (42) liegt aber das Bild K^* eines Kreises K mit dem Radius ϱ ganz in einem Kreise mit dem Radius $M'\sqrt{2}\varrho$, so daß

$$m K^* < 2 M'^2 m K$$

und damit

$$\sum m K^* < 2 M'^2 (\overline{m} W + \varepsilon)$$

ist. Da aber W^* von den K^* ganz überdeckt wird, so folgt weiter

$$\overline{m} W^* < 2M'^2 (\overline{m} W + \varepsilon)$$

und wegen der Willkürlichkeit von ε die zu beweisende Ungleichung.

Speziell wird also eine Nullmenge stets auf eine Nullmenge abgebildet. Die Meßbarkeit von W zieht übrigens die von W^* nach sich, denn eine meßbare Menge ist stets darstellbar als Vereinigungsmenge abzählbar vieler abgeschlossener Mengen und einer Nullmenge, von denen die abgeschlossenen Mengen wegen der Stetigkeit der Abbildung wieder auf abgeschlossene, also meßbare Mengen, die Nullmenge aber auf eine Nullmenge abgebildet wird, deren Vereinigungsmenge wieder meßbar ist.

Hilfssatz 2: *Wird unter der Voraussetzung* (42) *eine meßbare Menge W von positivem Maß auf eine Nullmenge W^* abgebildet, so ist fast überall in W die Funktionaldeterminante* $\frac{D(f, g)}{D(x, y)}$ *gleich Null.***)

In W gibt es nämlich einen maßgleichen Kern W_0, in dem erstens die Dichte von W gleich 1 ist und in dem zweitens der absolute Betrag der Funktionaldeterminante das Vergrößerungsverhältnis darstellt. Es sei P_0 ein Punkt W_0. Dann gibt es nach der Definition der Dichte zu $\varepsilon > 0$ ein Quadrat Q_0 mit dem Mittelpunkt P_0, so daß

$$\frac{m(Q_0 W)}{m Q_0} > 1 - \varepsilon$$

ist.***) Nun ist das Bild von $Q_0 W$ eine Nullmenge, die in der Nullmenge W^* enthalten ist. Ferner ist

$$m(Q_0 - Q_0 W) < \varepsilon m Q_0;$$

das Bild von $(Q_0 - Q_0 W)$ hat daher nach Hilfssatz 1 ein Maß, das kleiner als

$$2 M'^2 \varepsilon m Q_0$$

*) Diss. S. 9, Satz II.

**) Herr Ch. J. de la Vallée Poussin hat den entsprechenden Satz für *eine* Variable bewiesen und seine Wichtigkeit hervorgehoben, Transactions of the American Mathematical Society 16, 1915, S. 467, Corollaire.

***) Obgleich wir im § 2 die Dichte in einem Punkte P_0 mit Hilfe von Kreisen um P_0 definiert haben, können wir hier Quadrate zu dem gleichen Zweck benutzen, da der in Anmerkung *), S. 344 zitierte Satz für die *verallgemeinerte* Derivierte gilt.

ist. Insgesamt hat also die Menge Q_0^*, die Bild des Quadrates Q_0 ist, ein Maß von weniger als $2M'^2\varepsilon\, m Q_0$. Also

$$\frac{m Q_0^*}{m Q_0} < 2M'^2\varepsilon,$$

woraus für das Vergrößerungsverhältnis in P_0 wegen der Willkürlichkeit von ε

$$\Delta(P_0) = 0$$

folgt. Dann muß aber wegen der Bestimmung von W_0 auch

$$\left|\frac{D(f, g)}{D(x, y)}\right| = 0$$

in P_0 und daher ebenso in ganz W_0 sein, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

8. Es seien nun $f(x, y)$ und $g(x, y)$ im Gebiete G der xy-Ebene, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ im Gebiete Γ der $\xi\,\eta$-Ebene definiert. Das durch $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ von Γ entworfene Bild G_1 liege ganz in G. Die vier Funktionen mögen ferner beschränkte partielle Derivierte haben. Dann sind $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ außer in einer Nullmenge Z' in Γ partiell differenzierbar. Das Bild Z' von Z' ist nach Hilfssatz 1 eine Nullmenge in G_1. Wären $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$ überall in Γ partiell differenzierbar, so würden (33) und die für $g(x, y)$ analogen Formeln von § 5 in G_1 bis auf diejenige Nullmenge Z'' gelten, in der f und g nicht beide total differenzierbar sind. Unter der jetzigen Voraussetzung sind daher (33) und die analogen Formeln in G_1 gültig außer in der Nullmenge $Z'' + Z' = Z_0$ in G_1. Die Menge der (ξ, η) in Γ, in der (33) und die analogen nicht gelten, heiße Z_0. Dann ist Z_0 das durch $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ von Z_0 entworfene Bild.

Z_0 ist meßbar, denn die in (33) auftretenden Funktionen sind sämtlich meßbar in der $\xi\eta$-Ebene. Die Funktionen $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ und $g(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sind nämlich als stetige Funktionen stetiger Funktionen in (ξ, η) stetig, ihre partiellen Derivierten also meßbar. Das Gleiche gilt von den Derivierten von $x(\xi, \eta)$ und $y(\xi, \eta)$. Daß die zunächst nur in der xy-Ebene meßbaren Derivierten von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ nach x und y auch als Funktionen von ξ, η meßbar sind, sieht man folgendermaßen ein. Es ist

$$\frac{f(x(\xi, \eta) + h,\ y(\xi, \eta)) - f(x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta))}{h}$$

für jedes $h > 0$ in ξ, η stetig. Der Limes superior dieser Funktion für $h \to 0$, der die obere vordere partielle Derivierte nach x von $f(x, y)$ darstellt als Funktion der ξ, η, ist also als Funktion der zweiten Baireschen Klasse in der $\xi\eta$-Ebene meßbar. Das Gleiche gilt von den andern Derivierten von f und g. Auf der rechten und linken Seite von (33) und den analogen Formeln stehen also meßbare Funktionen, die sich nur in einer meßbaren Menge Z_0 unterscheiden können.

Ist nun Z_0 selbst eine Nullmenge, so gilt die Multiplikationsformel (34) in einem maßgleichen Kern von Γ. Ist $mZ_0 > 0$, so wollen wir zeigen, daß dennoch (34) fast überall in Γ gilt.

Zunächst sieht man, daß auch $f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ und $g(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ in (ξ,η) die Lipschitzsche Bedingung erfüllen. Denn z. B.

$$\left|\frac{f(x(\xi_1,\eta), y(\xi_1,\eta)) - f(x(\xi_2,\eta), y(\xi_2,\eta))}{\xi_1 - \xi_2}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{\xi_1-\xi_2}\right| < 2M \cdot \sqrt{2}\, M,$$

was aus (3) und (4) und den entsprechenden Lipschitzschen Ungleichungen für $x(\xi,\eta)$ und $y(\xi,\eta)$ folgt; zur Abkürzung ist dabei $x_1 = x(\xi_1,\eta)$ usw. geschrieben.

Da nun Z_0 auf die Nullmenge Z_0 abgebildet wird, so ist nach Hilfssatz 2 fast überall in Z_0

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = 0.$$

Da ferner das durch $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$ von Z_0 entworfene Bild Z_0^* nach Hilfssatz 1 ebenfalls eine Nullmenge sein muß, so geht Z_0 auch durch $u = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$, $v = g(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ in eine Nullmenge über, und fast überall in Z_0 ist daher nach Hilfssatz 2

$$\frac{D(f,g)}{D(\xi,\eta)} = 0,$$

so daß also in Z_0 fast überall beide Seiten von (34) verschwinden und die Gleichung somit gewiß erfüllt ist.

Damit haben wir den

Satz V: *Sind $f(x,y)$ und $g(x,y)$ zwei in einem Gebiete G der xy-Ebene und $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ zwei in einem Gebiete Γ der $\xi\eta$-Ebene definierte Funktionen, deren partielle Derivierte beschränkt sind (die Funktionen genügen mit andern Worten der Lipschitzschen Bedingung), wobei ferner die Funktionswerte von $x(\xi,\eta)$ und $y(\xi,\eta)$ in das Gebiet G hineinfallen, so gilt fast überall in Γ die Multiplikationsformel der Funktionaldeterminanten*

$$\frac{D(f,g)}{D(\xi,\eta)} = \frac{D(f,g)}{D(x,y)}\,\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)},$$

*wobei den Funktionaldeterminanten dort, wo sie etwa nicht existieren, ein beliebiger Wert beigelegt sein mag.**)

---

*) Das folgende, mit dem im § 3 gegebenen verwandte Beispiel zeigt übrigens, daß die Multiplikationsformel wirklich nur *fast* überall gilt:

III. Die Transformation der Doppelintegrale.

9. Es werde endlich durch die Funktionen
$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$
das beschränkte Gebiet G eineindeutig und stetig auf das Gebiet U der u, v-Ebene abgebildet, wobei über die nach (1) und (2) definierten Funktionen $L_\varphi(x, y)$ und $L_\psi(x, y)$ wieder vorausgesetzt sei, daß sie endlich und summierbar in G seien. Dann ist nach Satz III fast überall in G das Vergrößerungsverhältnis gleich $\left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right|$.

Die Abbildung ist ferner meßbar, d. h. sie führt jede meßbare Teilmenge von G in eine meßbare Teilmenge von U über. Denn bilden wir:
$$w(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze} \frac{\sqrt{(\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y))^2 + (\psi(x+h, y+k) - \psi(x, y))^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$0 < h^2 + k^2 \leqq \varrho^2$$
und
$$L(x, y) = \lim_{\varrho \to 0} w(x, y; \varrho),$$
so ist für die Meßbarkeit der Abbildung hinreichend, daß $L(x, y)$ in G endlich ist.*) Nun ist aber
$$w(x,y;\varrho) \leqq \text{obere Grenze} \frac{|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)| + |\psi(x+h, y+k) - \psi(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$\leqq \text{obere Grenze} \frac{|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$+ \text{obere Grenze} \frac{|\psi(x+h, y+k) - \psi(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = w_\varphi(x,y;\varrho) + w_\psi(x,y;\varrho);$$
also
$$L(x, y) \leqq L_\varphi(x, y) + L_\psi(x, y),$$
folglich $L(x, y)$ endlich.**) Nach einem Satze aus der Transformationstheorie der Lebesgueschen Integrale***) ergibt sich dann

---

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \\ g(x, y) &= \frac{x y^2}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \text{für } x^2+y^2 > 0 \qquad \left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } x^2+y^2 = 0, \qquad \begin{aligned} x &= \xi + \eta \\ y &= -\xi + \eta. \end{aligned}$$

Im Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ ergibt sich nämlich:
$$\frac{D(f, g)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0, \qquad \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 2.$$

*) Diss. S. 57, Satz XXI und S. 59, Satz XXII.

**) Man erkennt leicht, daß $L_\varphi(x, y) \leqq L(x, y)$, $L_\psi(x, y) \leqq L(x, y)$ ist, also die Endlichkeit und Summierbarkeit von $L(x. y)$ mit unserer Voraussetzung äquivalent ist.

***) Diss. S. 52, Satz XIX.

Satz VI: *Wird das Gebiet G der xy-Ebene eineindeutig auf das Gebiet U der uv-Ebene abgebildet durch zwei Funktionen $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, für welche die nach* (1) *und* (2) *gebildeten Funktionen $L_\varphi(x, y)$ und $L_\psi(x, y)$ in G endlich und summierbar sind (wofür hinreicht, daß φ und ψ der Lipschitzschen Bedingung genügen), so ist für eine in U definierte endliche Funktion $F(u, v)$*

$$\iint\limits_U F(u, v)\, du\, dv = \iint\limits_G F(u(x, y), v(x, y)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right| dx\, dy,$$

wobei aus der Existenz des einen Integrals die des andern folgt und der Funktionaldeterminante auf der Nullmenge, wo sie etwa nicht existiert, ein beliebiger Wert beigelegt ist.

Nicht ganz so allgemein habe ich diesen Satz schon früher, allerdings auf eine nicht sehr durchsichtige Weise, mit Hilfe der Approximation durch Tonellische Polynome bewiesen.*)

Es soll noch einmal hervorgehoben werden, daß sämtliche Beweise und Sätze dieser Arbeit sich ohne weiteres auf mehr als zwei Variable übertragen lassen.

Wickersdorf, den 4. Oktober 1918.

---

*) Diss. S. 107, Satz XXVI.

Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen.

Herrn Geheimrat Prof. Dr. F. Klein
zu seinem
fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 12. Dezember 1918
gewidmet von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Einleitung.

Man definiert in der Invariantentheorie gewöhnlich eine Invariante $I(a)$ der binären Form

$$A(\xi, \eta) = a_0 \xi^n + \binom{n}{1} a_1 \xi^{n-1}\eta + \cdots + a_n \eta^n$$

als eine Funktion der Koeffizienten a_i von A, die sich bis auf einen konstanten Faktor reproduziert, wenn man die a_i durch die Koeffizienten der neuen aus $A(\xi, \eta)$ durch die allgemeine lineare Substitution

$$\xi = p\xi' + \bar{p}\eta', \quad \eta = q\xi' + \bar{q}\eta'$$

entstehenden Form

$$A'(\xi', \eta') = a_0' \xi'^n + \binom{n}{1} a_1' \xi'^{n-1}\eta' + \cdots + a_n' \eta'^n$$

ersetzt.

Unter einem ganz anderen Gesichtspunkt wird der Invariantenbegriff in der durch F. Kleins Erlanger Programm inaugurierten Betrachtungsweise eingeführt und behandelt. Dort wird eine Invariante als ein Ausdruck definiert, der (bis auf einen Zahlenfaktor) unverändert bleibt, wenn man auf die in ihm vorkommenden Variabeln beliebige Transformationen der zugrunde gelegten Gruppe anwendet, einer Gruppe, die in der Regel direkt durch gewisse charakteristische Eigenschaften definiert wird, zumeist durch die Forderung, gewisse von vornherein vorgegebene Ausdrücke, oder Gebilde, oder Klassen von Gebilden in sich überzuführen. Eine derartige Definition der Gruppe der Substitutionen der Koeffizienten einer binären Form, die durch die allgemeinste lineare umkehrbare Substitution der Variabeln erzeugt, „induziert“, wird, war bis heute noch nicht bekannt. — Unserer Forderung wäre Genüge geleistet, wenn man ein System von Formen angeben könnte, welches die in Rede stehende Gruppe der Trans-

formationen als die größte Gruppe gestattet. Nun ließe es sich wohl durch eingehende Diskussion des Äquivalensproblems zeigen, daß die Gesamtheit *aller* Invarianten einer binären Form dieser Forderung genügt, und da man alle Invarianten durch endlich viele unter ihnen rational darstellen kann, so läßt sich ein solches System von Formen wirklich angeben. Indessen ist bei Aufstellung dieser Formen die bereits entwickelte Invariantentheorie zu benutzen. Auch ist ihre begriffliche Bedeutung nicht immer leicht zu übersehen.

Es ist daher von prinzipieller Bedeutung, daß man für jedes $n > 1$ eine Invariante von $A(\xi, \eta)$ angeben kann, die eine von vornherein feststehende begriffliche Bedeutung für $A(\xi, \eta)$ hat und *nur* die in der binären Invariantentheorie zugrunde zu legende Gruppe der Transformationen zuläßt. *Eine solche Invariante ist, wie wir zeigen werden, die Diskriminante* $\Delta(a_i)$ *von* $A(\xi, \eta)$.*)

Ganz analog liegen die Verhältnisse bei einem System von 2 binären Formen $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$:

$$B(\xi, \eta) = b_0 \xi^m + \cdots + b_m \eta^m.$$

Hier bestimmt die *Resultante* $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ von $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$ die allgemeinste in der Theorie der simultanen Invarianten zugrunde zu legende Gruppe von Transformationen, da der Satz gilt, daß jedes Paar von Substitutionen, dessen Anwendung auf die a_i bzw. b_i die Resultante $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich überführt, durch eine lineare umkehrbare Substitution der ξ, η induziert wird, verbunden mit der Multiplikation aller Koeffizienten von $B(\xi, \eta)$ mit einer beliebigen nicht verschwindenden Konstante.

Der in 1. geführte Beweis des Satzes über die Diskriminante beruht wesentlich auf einem Satze von Hilbert**) über die Charakterisierung der Ausartungen einer binären Form durch das identische Verschwinden der sogenannten *Polaren* ihrer Diskriminante, dessen einfachen Beweis wir in 2. nachtragen. Zum Beweis des Satzes über die Resultante, der in 4. erbracht wird, ist es notwendig, einen dem Hilbertschen analogen Satz über das Verschwinden der Polaren der *Resultante* abzuleiten. Dies geschieht in 3.

Eine viel schwierigere Diskussion ist nötig, um die allgemeinsten linearen Substitutionen aufzustellen, die $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich überführen und

*) Hierin ist als Spezialfall der Satz enthalten, daß alle Gewichtsbestimmungen, in bezug auf die die Diskriminante von $A(\xi, \eta)$ isobar ist, sich aus den bekannten trivialen Gewichtsbestimmungen, die in der elementaren Algebra angegeben werden, zusammensetzen lassen. Ähnliches gilt auch für die Resultante. Beide Resultate lassen sich auch durch direkte Untersuchung der Struktur von Diskriminanten und Resultanten binärer Formen beweisen.

**) D. Hilbert, Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche, Math. Ann. XXX (1887), S. 437 ff.

in denen a_i und b_i *nicht* getrennt zu sein brauchen. Ist $m = n$, so bleibt bekanntlich $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ invariant, wenn man A und B durch

$$\pi A(\xi, \eta) + \bar{\pi} B(\xi, \eta),\quad \varkappa A(\xi, \eta) + \bar{\varkappa} B(\xi, \eta) \qquad \begin{vmatrix} \pi & \bar{\pi} \\ \varkappa & \bar{\varkappa} \end{vmatrix} \neq 0$$

ersetzt. Ist $m > n$, so bleibt $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ invariant, wenn man A, B durch $\pi A(\xi, \eta)$, $\varkappa B(\xi, \eta) + T(\xi, \eta) A(\xi, \eta)$ ersetzt, wo $\pi \neq 0$, $\varkappa \neq 0$, $T(\xi, \eta)$ eine beliebige binäre Form $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Ist aber $m = n = 1$, so bleibt die Resultante $\mathsf{P}(a_i b_i)$, die dann die allgemeinste Determinante 2^{ten} Grades ist, unverändert, wenn man in der entsprechenden Matrix Zeilen und Spalten vertauscht.

Wir zeigen nun, daß durch die angegebenen Operationen, kombiniert mit linearen umkehrbaren Substitutionen von ξ, η jede lineare Substitution der a_i, b_i erzeugt werden kann, die $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich überführt (bis auf einen von 0 verschiedenee Faktor). Zum Beweis dieses Satzes müssen vor allem die Sätze über das Verschwinden der Polaren der Resultante vertieft werden (Nr. 5). Der Fall $m \geqq n > 1$ wird dann in 7. erledigt, wobei der merkwürdige Hilfssatz der Nr. 6 wesentliche Dienste leistet. Die Untersuchung des Falles $m \geqq n = 1$ erfordert eine mehr direkte Diskussion (der Fall $m > n = 1$ in 8., der Fall $m = n = 1$ in 9.). Die im Fall $m = n = 1$ angewandte Methode läßt sich auch, wie in Nr. 9 angedeutet wird, zur Ableitung der bekannten Formeln für die allgemeinsten Substitutionen, die die allgemeine Determinante, bzw. die allgemeine symmetrische Determinante invariant läßt, anwenden.

Alle diese Entwicklungen beschäftigen sich zunächst nur mit linearen Substitutionen von nicht verschwindender Determinante. In 10. wird nun gezeigt, daß weder $\Delta(a_i)$, noch $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ lineare Substitutionen in sich mit verschwindender Determinante besitzen, indem bewiesen wird, daß $\Delta(a_i)$ und $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ sich nicht in Formen mit kleineren Variabelnzahlen linear transformieren lassen.

Unsere Sätze über $\Delta(a_i)$ für $n=2$, und über $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ für $m=n=1$ ergeben die allgemeinsten Kollineationen, die einen nicht ausgearteten Kegelschnitt, bzw. eine nicht ausgeartete Fläche 2^{ten} Grades in sich überführen. Die entsprechenden Formelsysteme sind längst bekannt.*) Für $n = 3$ und $n = 4$ hängt unser Satz über die Diskriminante enge zusammen mit gewissen Resultaten, die in gewissen Untersuchungen von S. Lie und G. Fano**) über *kontinuierliche* Gruppen enthalten sind. Lie bestimmt alle Formen in vier Veränderlichen, die kontinuierliche Transformationen

*) Man vgl. hierzu die Literaturangaben bei Fricke-Klein, Vorlesungen über automorphe Funktionen, Leipzig (1897), Bd. I, S. 12—15, 44—49.

**) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, III, S. 190—196. G. Fano, Torino Mem. (2) 46, Roma Lincei-Rend (5) 4, 1. Sem. p. 149. (Vgl. auch Enz. d. M. V. III AB 48 Nr. 8).

in sich zulassen und kommt dabei auch auf die Diskriminante einer kubischen Form. G. Fano untersucht kontinuierliche Gruppen, welche die Invarianten einer biquadratischen Form in sich überführen. Unser Satz leistet aber insofern mehr als diese Untersuchungen, die sich aller Hilfsmittel der Lieschen Theorie bedienen, als er behauptet, daß die durch die binären Substitutionen induzierten Substitutionen die *ganze* Gruppe bilden, die die betreffenden Formen in sich überführt, und nicht nur die größte kontinuierliche Untergruppe dieser Gruppe. Denn die größte Gruppe, die eine Form in sich überführt, ist im allgemeinen eine sogenannte *gemischte* Gruppe, die eine kontinuierliche Untergruppe vom endlichen Index besitzt. (Diese Untergruppe kann sich natürlich auch auf die identische Substitution reduzieren. — Über die Form muß man hierbei voraussetzen, daß sie sich nicht linear auf eine Form mit kleinerer Variabelnzahl transformieren läßt. Sonst gestalten sich die Verhältnisse etwas komplizierter.) Eine solche gemischte Gruppe tritt z. B. bei der Resultante zweier binärer Linearformen auf.

1. *Diskriminante.* Es sei

$$A(\xi, \eta) = a_0 \xi^n + \binom{n}{1} a_1 \xi^{n-1} \eta + \cdots + a_n \eta^n \tag{1}$$

eine binäre Form n^{ter} Ordnung, $\Delta(a_i)$ ihre Diskriminante. Übt man auf ξ, η die lineare Substitution

$$\xi = p\xi' + \bar{p}\eta', \quad \eta = q\xi' + \bar{q}\eta',$$

so lassen sich die Koeffizienten a_i' der dadurch aus $A(\xi, \eta)$ entstehenden neuen Form $A'(\xi', \eta')$, wie eine einfache Rechnung ergibt*), in der folgenden Form darstellen:

$$a_0' = A(p, q), \ldots, \; a_i' = \frac{(n-i)!}{n!}\left(\bar{p}\frac{\partial}{\partial p} + \bar{q}\frac{\partial}{\partial q}\right)^i A(p, q), \ldots.$$

Die Koeffizienten a_i erfahren also eine lineare Substitution S:

$$a_i' = \sum_k s_{ik} a_k, \quad \text{wo } s_{ik} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,k!}\left(\bar{p}\frac{\partial}{\partial p} + \bar{q}\frac{\partial}{\partial q}\right)^i p^{n-k} q^k \tag{2}$$

ist. Setzt man in $\Delta(a_i)$ für die a_i die Ausdrücke a_i' ein, so ergibt sich wegen der Invarianteneigenschaft der Diskriminante

$$\Delta(a_i') = (p\bar{q} - q\bar{p})^{n(n-1)} \Delta(a_i).$$

Es sei nun umgekehrt S:

$$a_i' = \sum_k s_{ik} a_k$$

eine umkehrbare lineare Substitution von der Eigenschaft, daß, wenn man in $\Delta(a_i)$ *die* a_i *durch die Ausdrücke* a_i' *ersetzt, das Resultat* $\Delta(a_i')$ *sich von*

*) Vgl. z. B. Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, Leipzig (1887), S. 105.

$\Delta(a_i)$ *nur um einen von den a_i unabhängigen von 0 verschiedenen Faktor unterscheidet. Dann kann, behaupten wir, die Substitution S durch eine lineare Substitution der Variabeln ξ, η erzeugt werden. Mit anderen Worten, es gibt solche vier Zahlen p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$, daß die Koeffizienten s_{ik} von S sich aus ihnen durch die Formeln* (2) *ableiten lassen.*

Wir beweisen zunächst den folgenden *Hilfssatz: Es besitze eine umkehrbare lineare Substitution der Koeffizienten von $A(\xi, \eta)$*

$$(3) \qquad a_i' = \sum_k s_{ik} a_k,$$

die Eigenschaft, daß durch sie jeder Form $A(\xi, \eta)$, die eine vollständige n^{te} Potenz ist, eine Form mit Koeffizienten a' zugeordnet wird, die ebenfalls eine vollständige n^{te} Potenz ist. Dann kann die Substitution (3) *durch eine lineare Substitution der Variabeln ξ, η von $A(\xi, \eta)$ erzeugt werden.*

Denn setzen wir für $A(\xi, \eta)$ einfach $(u\xi + v\eta)^n$, so daß a_i zu $u^{n-i}v^i$ wird, so entstehen aus den Ausdrücken a_i' die Formen n^{ten} Grades in u, v

$$s_i(u, v) = \sum_k s_{ik} u^{n-k} v^k.$$

Nach der Annahme müssen für jedes Wertsystem der u, v Beziehungen bestehen

$$(4) \quad s_i(u,v)\, s_k(u,v) = s_{i+k}(u,v)\, s_0(u,v); \quad s_{n-i}(u,v) s_{n-k}(u,v) = s_{n-i-k}(u,v) s_0(u,v)$$

$$(5) \qquad (s_i(u,v))^n = (s_0(u,v))^{n-i}\, (s_n(u,v))^i. \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Diese Beziehungen bestehen daher zwischen den Polynomen $s_i(u, v)$ identisch in den Variabeln u, v. Aus (5) folgt zuerst, daß wenigstens eines von den Polynomen $s_0(u, v)$, $s_n(u, v)$ nicht identisch verschwindet, falls nicht alle $s_i(u, v)$ identisch verschwinden. Und das letzte ist unmöglich, da sonst alle $s_{ik} = 0$ wären.

Es sei etwa $s_0(u, v)$ von 0 verschieden. Dann besteht für die Form

$$A'(\xi', \eta') = \sum_i s_i(u,v)\, \xi'^{n-i} \eta'^i$$

die Darstellung: $A'(\xi', \eta') = s_0(u, v) \left(\xi' + \frac{s_1(u,v)}{s_0(u,v)} \eta'\right)^n$,

wie sich aus den Beziehungen (4) sofort ergibt. Es sei nun

$$\xi' + \frac{s_1(u,v)}{s_0(u,v)} \eta' = d(u, v)\, l(u, v, \xi', \eta'),$$

wo $l(u, v, \xi', \eta')$ eine ganze rationale irreduzible Funktion ihrer Argumente, $d(u, v)$ aber rational in u, v ist. Dann ergibt sich aus den bekannten Teilbarkeitseigenschaften von Polynomen, daß in der Gleichung

$$A'(\xi', \eta') = s_0(u, v)\, d^n(u, v)\, l^n(u, v, \xi', \eta')$$

$s_0(u,v)\, d^n(u,v)$ ein Polynom in u, v ist. Da $A'(\xi',\eta')$ homogen vom n^{ten} Grade in u, v ist, so sind nur zwei Fälle möglich:

1. $l(u,v,\xi',\eta')$ hängt von u, v gar nicht ab, und das Polynom $s_0(u,v)$ $d^n(u,v)$ ist homogen vom n^{ten} Grad in u, v. Dann unterscheiden sich die einzelnen Polynome $s_i(u,v)$ nur durch konstante Faktoren voneinander und die Matrix (s_{ik}) wäre vom Range 1 oder 0, was der Annahme widerspricht. Dieser Fall ist daher unmöglich.

2. $l(u,v,\xi',\eta')$ ist homogen linear in den u,v, daher ist $s_0(u,v)\, d^n(u,v)$ eine Konstante, die wir gleich 1 annehmen können, indem wir l mit der n^{ten} Wurzel aus ihr multiplizieren. Es sei dann

$$l(u,v,\xi',\eta') = pu\xi' + qv\xi' + \bar{p}u\eta' + \bar{q}v\eta'.$$

Es folgt dann aus

$$A'(\xi',\eta') = ((pu+qv)\,\xi' + (\bar{p}u + \bar{q}v)\eta')^n$$

$$s_i(u,v) = (pu+qv)^{n-i}(\bar{p}u+\bar{q}v)^i = \frac{(n-i)!}{n!}\left(\bar{p}\,\frac{\partial}{\partial p} + \bar{q}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)^i (pu+qv)^n;$$

Um hieraus den Ausdruck von a_i' durch a_i zu erhalten, brauchen wir nur allgemein $u^{n-i}v^i$ durch a_i zu ersetzen. Dann entsteht aber aus $(pu+qv)^n$ wieder $A(p,q)$. Daher erhalten wir endlich

$$a_i' = \sum s_{ik}\, a_k = \frac{(n-i)!}{n!}\left(\bar{p}\,\frac{\partial}{\partial p} + \bar{q}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)^i A(p,q),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.*)

Wir betrachten nun zugleich mit $A(\xi,\eta)$ eine zweite Form n^{ter} Ordnung

$$X(\xi,\eta) = x_0\xi^n + \binom{n}{1} x_1 \xi^{n-1}\eta + \cdots + x_n\eta^n$$

mit unbestimmten Koeffizienten x_i. Es sei λ ein Parameter. Betrachten wir nun die Diskriminante $\Delta(a_i + \lambda x_i)$ der Form

$$A(\xi,\eta) + \lambda X(\xi,\eta)$$

und entwickeln wir diese Diskriminante nach Potenzen von λ, so kommt

$$\Delta(a_i + \lambda x_i) = \Delta(a_i) + \lambda\Delta_1(a_i; x_i) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_2(a_i; x_i) + \cdots \tag{6}$$

Der Koeffizient Δ_k von $\frac{\lambda^k}{k!}$ in dieser Entwicklung entsteht aus $\Delta(a_i)$ durch k-fache Anwendung des Differentiationsprozesses

*) Es ist andererseits klar, daß unsere Methode auch alle binären Substitutionen liefert, durch die (3) induziert werden kann. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über die eindeutige Zerlegung von Polynomen:

1. *Jede Substitution (3) wird genau durch n binäre Substitutionen induziert, die aus einander durch Multiplikation mit n^{ten} Einheitswurzeln hervorgehen.*

2. *Sind die Koeffizienten der Substitutionen (3) ganze rationale Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1, so kann (3) durch eine binäre Substitution induziert werden, deren Koeffizienten auch ganze rationale Zahlen sind, wenn man für gerade n unter Umständen zuvor alle Koeffizienten s_{ik} in (3) mit -1 multipliziert.*

$$\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial a_i}$$

und heißt bekanntlich die k^{te} *Polare* von $\Delta(a_i)$. Üben wir zugleich auf a_i und x_i die Substitution S aus, so bleibt offenbar $\Delta(a_i + \lambda x_i)$ bis auf einen Zahlenfaktor unverändert. Daher gilt dasselbe auch für alle Koeffizienten der einzelnen Potenzen von λ in (6). Wir sehen also, daß zugleich mit Δ auch jede Polare von Δ gegenüber S invariant ist.

Nun gilt der folgende Satz von Hilbert: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $A(\xi, \eta)$ für bestimmte Werte ihrer Koeffizienten eine vollständige n^{te} Potenz wird, ist, daß für diese Werte der Koeffizienten von $A(\xi, \eta)$ sowohl die Diskriminante $\Delta(a_i)$, als auch ihre $n-2$ ersten Polaren identisch in den Unbestimmten x_i verschwinden.**)

Wir können daher sofort folgern, daß durch S jeder vollständigen n^{ten} Potenz wieder eine vollständige n^{te} Potenz zugeordnet wird. Denn nach dem Obigen gilt für jede k^{te} Polare von $\Delta(a_i)$

$$\Delta_k(a_i'; x_i') = c\Delta_k(a_i; x_i) \qquad c \neq 0$$

identisch in a_i und x_i, wo $x_i' = \sum\limits_k s_{ik} x_k$ ist. Ist nun für ein Wertsystem der a_i $\Delta_k(a_i; x_i) = 0$ für jedes Wertsystem der x_i, so gilt für das durch S zugeordnete Wertsystem a_i'

$$\Delta_k(a_i'; x_i') = 0$$

für jedes Wertsystem der x_i', welches vermöge S einem Wertsystem x_i zugeordnet werden kann, d. h., wegen der vorausgesetzten Umkehrbarkeit von S, für jedes Wertsystem der x_i', also identisch in x_i'. Verschwindet also für $A(\xi, \eta)$ Δ mit ihren $n-2$ ersten Polaren identisch, so gilt dasselbe für $A'(\xi', \eta')$, und $A'(\xi', \eta')$ ist zugleich mit $A(\xi, \eta)$ eine vollständige n^{te} Potenz. Daher können wir auf S den oben bewiesenen Hilfssatz anwenden, und damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.**)

2. *Beweis des Hilbertschen Satzes.* Wir wollen noch den einfachen Beweis des oben benutzten Hilbertschen Satzes nach der Hilbertschen Methode angeben, da wir analoge Sätze für die *Resultante* abzuleiten haben werden.

*) D. Hilbert, Über die Singularitäten der Diskriminantenfläche, Math. Ann. XXX (1887), S. 437 ff. Der zitierte Satz ist als Spezialfall im allgemeinen Satz über den Zusammenhang der Ausartungen einer binären Form mit dem Verhalten der Polaren ihrer Diskriminante enthalten, den Hilbert in dieser Abhandlung aufstellt und beweist.

**) Es möge hier noch erwähnt werden, daß eine ganz analoge Charakterisierung der induzierten Substitutionen (2) auch mit Hilfe des aus den Koeffizienten der Hesseschen Kovariante von (1) gebildeten Moduls möglich ist; im Falle $n = 2$ kommt man so wieder zur Diskriminante der binären quadratischen Form.

Es sei $a_0 \neq 0$ und $a_1, \ldots, a_n$ seien beliebige Zahlen. Es sei

$$\begin{aligned} A(t) = A(t,1) &= a_0 t^n + \cdots + a_n = a_0 (t-t_1)^{\mu_1} (t-t_2)^{\mu_2} \ldots (t-t_k)^{\mu_k} \\ X(t) = X(t,1) &= x_0 t^n + \cdots + x_n \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 \neq t_2 \neq \cdots \neq t_k \\ \mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0, \ldots \\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n \end{array} \right.$$

gesetzt. Wir entwickeln die n Wurzeln der Gleichung

$$A(t) + \lambda X(t) = 0$$

nach im allgemeinen gebrochenen Potenzen von λ. Um die Reihenentwicklungen derjenigen μ_1 Wurzeln dieser Gleichung zu erhalten, die für $\lambda = 0$ zu t_1 werden, setzen wir $t = t_1 + t' \lambda^{\frac{1}{\mu_1}}$. Dann kommt nach Division durch λ:

$$a_0 t'^{\mu_1} \{ (t_1 - t_2)^{\mu_2} \ldots (t_1 - t_k)^{\mu_k} + \cdots \} + X(t_1) + \cdots = 0.$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir hieraus für t' die Werte

$$\left(\frac{X(t_1)}{a_0 (t_1 - t_2)^{\mu_2} \ldots (t_1 - t_k)^{\mu_k}} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}$$

Daher sind die ersten Glieder der Entwicklungen der gesuchten μ_1 Wurzeln

$$(7) \qquad t_1 + \varepsilon^i \left[\frac{X(t_1)}{a_0 (t_1 - t_2)^{\mu_2} \ldots (t_1 - t_k)^{\mu_k}} \right]^{\frac{1}{\mu_1}} \lambda^{\frac{1}{\mu_1}} + \cdots, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu_1 - 1$$

wo ε eine μ_1^{te} Einheitswurzel ist.*) Und ähnliche Entwicklungen entsprechen jeder Wurzel t_i von $A(t)$. Drücken wir nun die Diskriminante von $A(t) + \lambda X(t)$ oder, was dasselbe ist, von $A(\xi, \eta) + \lambda X(\xi, \eta)$ durch das Differenzenprodukt der Wurzeln aus (wobei noch mit der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von $a_0 + \lambda x_0$ zu multiplizieren ist), so entsteht eine Reihe, deren niedrigstes Glied bis auf von 0 verschiedene unwesentliche Zahlenfaktoren gleich ist:

$$(8) \qquad X^{\mu_1 - 1}(t_1)\, X^{\mu_2 - 1}(t_2) \ldots X^{\mu_k - 1}(t_k)\, \lambda^{n-k}.$$

Andrerseits ist nach (6)

$$\Delta(a_i + \lambda x_i) = \Delta(a_i) + \lambda \Delta_1(a_i, x_i) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_2(a_i; x_i) + \cdots$$

Daher verschwinden $\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_{n-k-1}$ identisch in x_i, während Δ_{n-k} von 0 verschieden bleibt. k ist aber dann und nur dann gleich 1, wenn $A(\xi, \eta)$ eine vollständige n^{te} Potenz ist, womit der Hilbertsche Satz bewiesen ist. — Von der Annahme $x_0 \neq 0$ können wir uns leicht befreien,

*) Daß man auf diese Weise in der Tat zu den ersten Gliedern der Reihenentwicklungen gelangt, folgt aus den bekannten Methoden der Reihenentwicklung algebraischer Funktionen. Man vgl. z. B. Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabei, (Leipzig 1902), 4. und 5. Vorlesung.

indem wir eine lineare Substitution der Variabeln ξ, η anwenden, und ihre Koeffizienten so wählen, daß bei der transformierten Form $A(\xi, \eta)$ der erste Koeffizient von 0 verschieden wird. Denn bei einer solchen Substitution bleiben die Mehrfachheiten der Wurzeln der Form unverändert, und die Diskriminante und ihre Polaren bleiben bis auf von 0 verschiedene Zahlenfaktoren invariant. — Für identisch verschwindende Formen gilt der Satz selbstverständlich auch.

Schreiben wir anstatt (6) allgemeiner

$$\Delta(\mu a_i + \lambda x_i) = \mu^{2n-2}\Delta(a_i) + \frac{\mu^{2n-3}\lambda}{1!}\Delta_1(a_i; x_i) + \frac{\mu^{2n-4}\lambda^2}{2!}\Delta_2(a_i; x_i) + \cdots + \frac{\lambda^{2n-2}}{(2n-2)!}\Delta(x_i),$$

so sehen wir, daß jede Polare $\Delta_k(a_i; x_i)$ auch bis auf einen Zahlenfaktor als die $(2n-2-k)^{\text{te}}$ Polare $\Delta_{2n-2-k}(x_i; a_i)$ von $\Delta(x_i)$ aufgefaßt werden kann, die durch wiederholte Anwendung des Polaren-Prozesses $a_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ entsteht. Ist allgemein $k > l$, $l \geqq 0$, $k \leqq 2n-2$, so gelten die Formeln (wobei unter $\Delta_0(a_i; x_i)$ und $\Delta_0(x_i; a_i)$, resp. $\Delta(a_i)$, $\Delta(x_i)$ zu verstehen sind):

$$\Delta_k(a_i; x_i) = c\Delta_{2n-2-k}(x_i; a_i) = c'\left(x_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial a_n}\right)^{k-l} \Delta_l(a_i; x_i)$$

$$\Delta_l(a_i; x_i) = c''\Delta_{2n-2-l}(x_i; a) = c'''\left(a_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k-l} \Delta_k(a_i; x_i),$$

wo c, c', c'', c''' von 0 verschiedene Zahlen sind. Ist daher für ein bestimmtes Wertsystem der a_i $\Delta_k(a_i; x_i)$ identisch in den x_i gleich 0, so gilt dasselbe auch für $\Delta_l(a_i; x_i)$ $(0 \leqq l < k)$. Wir können daher den Hilbertschen Satz auch so formulieren, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit von $A(\xi, \eta)$ als vollständige n^{te} Potenz das identische Verschwinden der $(n-2)^{\text{ten}}$ Polare der Diskriminante von $A(\xi, \eta)$ ist. Berücksichtigen wir aber, daß nach der Formel (8) für die nicht identisch verschwindende Form $A(\xi, \eta)$ die $(n-k)^{\text{te}}$ Polare $\Delta_{n-k}(a_i; x_i)$ ihrer Diskriminante sicher nicht identisch in x_i verschwinden kann, so folgt aus den obigen Bemerkungen, daß, *wenn für eine Form $A(\xi, \eta)$ für ein $k \geqq n-1$ die k^{te} Polare ihrer Diskriminante verschwindet identisch in x_i, alle Koeffizienten a_i von $A(\xi, \eta)$ gleich 0 sind.*

3. *Das Verschwinden der Polaren der Resultante.* Es seien

$$A(\xi, \eta) = a_0\xi^n + \binom{n}{1} a_1 \xi^{n-1}\eta + \cdots + a_n \eta^n,$$

$$B(\xi, \eta) = b_0\xi^m + \binom{m}{1} b_1 \xi^{m-1}\eta + \cdots + b_m \eta^m$$

zwei binäre Formen n^{ten} bzw. m^{ten} Grades ($m \geq n$), $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ ihre Resultante. Um in bezug auf P ähnliche Untersuchungen durchzuführen, wie in bezug auf die Diskriminante einer binären Form, müssen wir wiederum die Bedeutung des Verschwindens der *Polaren* von P untersuchen. Es seien

$$X(\xi, \eta) = x_0 \xi^n + \binom{n}{1} x_1 \xi^{n-1} \eta + \cdots + x_n \eta^n,$$

$$Y(\xi, \eta) = y_0 \xi^m + \binom{m}{1} y_1 \xi^{m-1} \eta + \cdots + y_m \eta^m$$

zwei Formen mit unbestimmten Koeffizienten. Wir entwickeln die Resultante der Formen $A + \lambda X$, $B + \mu Y$ nach Potenzen von λ, μ;

$$(9) \qquad \mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i + \mu y_i) = \sum_{\substack{k=0,1,\ldots,m \\ r=0,1,\ldots,n}} \frac{\lambda^k \mu^r}{k!\, r!} \mathsf{P}_{k,r}(a_i, b_i; x_i, y_i).$$

Hier ist jedes Polynom $\mathsf{P}_{k,r}(a_i, b_i; x_i, y_i)$ eine „gemischte Polare" von P von den Ordnungen k, r und entsteht aus P durch wiederholte Anwendung der Polarenprozesse

$$x_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial a_n}, \quad y_0 \frac{\partial}{\partial b_0} + \cdots + y_m \frac{\partial}{\partial b_m}.$$

Setzt man in (9) $\lambda = \mu$, so erhält man die Entwicklung

$$\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i + \lambda y_i) = \mathsf{P}(a_i, b_i) + \lambda \Pi_1(a_i, b_i; x_i, y_i) + \frac{\lambda^2}{2!} \Pi_2(a_i, b_i; x_i, y_i) + \cdots,$$

wo allgemein

$$(10) \quad \Pi_k(a_i, b_i; x_i, y_i) = \mathsf{P}_{k,0}(a_i, b_i; x_i, y_i) + \binom{k}{1} \mathsf{P}_{k-1,1}(a_i, b_i; x_i, y_i) + \cdots + \mathsf{P}_{0,k}(a_i, b_i; x_i, y_i)$$

aus $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ durch k-fache Anwendung des Prozesses

$$x_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial a_n} + y_0 \frac{\partial}{\partial b_0} + \cdots + y_m \frac{\partial}{\partial b_m}$$

hervorgeht. Dabei soll in (10) $\mathsf{P}_{r,s}(a_i, b_i; x_i, y_i)$, wenn $r > m$ oder $s > n$ ist, gleich 0 sein. Da die einzelnen Bestandteile von Π_k in (10) von verschiedenen Graden in bezug auf die Reihen von Unbestimmten x_i, y_i sind, so folgt aus dem identischen Verschwinden von Π_k für ein gewisses Wertsystem der a_i, b_i, daß für diese Werte auch $\mathsf{P}_{k,0}(a_i, b_i; x_i, y_i)$ und $\mathsf{P}_{0,k}(a_i, b_i; x_i, y_i)$ identisch verschwinden. — Die Ausdrücke Π_k werden wir als „simultane" Polaren von $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ bezeichnen.

Setzen wir nun in (9) $\mu = 0$, so erhalten wir die Entwicklung

$$(11) \quad \mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i) = \mathsf{P}(a_i, b_i) + \lambda \mathsf{P}_{1,0}(a_i, b_i; x_i) + \frac{\lambda^2}{2!} \mathsf{P}_{2,0}(a_i, b_i, x_i) + \cdots$$

Es sei $b_0 \neq 0$ und

$$B(t) = B(t,1) = b_0(t - t_1')^{\nu_1} \cdots (t - t_\varrho')^{\nu_\varrho} \qquad \begin{cases} t_1' \neq t_2' \neq \cdots \neq t_\varrho' \\ \nu_1 > 0, \cdots, \nu_\varrho > 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\varrho = m \end{cases}$$

Es seien etwa $t_1', \ldots t_\sigma'$ die gemeinsamen Wurzeln von $B(t)$ und $A(t) = A(t, 1)$, $N = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\sigma$ ihre Gesamtmehrfachheit in $B(t)$. Berechnen wir $\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i)$ nach der Formel

$$\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b) = (-1)^{nm} b_0^n \prod_{i=1}^{i=\varrho} (A(t_i', 1) + \lambda X(t_i', 1)),$$

so ergibt sich ein nach Potenzen von λ zu ordnender Ausdruck, dessen niedrigstes Glied von einem unwesentlichen von 0 verschiedenen Zahlenfaktor abgesehen gleich ist:

$$X^{\nu_1}(t_1', 1) \ldots X^{\nu_\sigma}(t_\sigma', 1) \lambda^N. \tag{12}$$

Wir erhalten daher durch Vergleich mit der Entwicklung (11)

$$\mathsf{P}(a_i, b_i) = 0, \ \mathsf{P}_{1,0}(a_i, b_i; x_i) = 0, \ldots, \ \mathsf{P}_{N-1,0}(a_i, b_i; x_i) = 0, \tag{13}$$

während $\mathsf{P}_{N,0}(a_i, b_i; x_i)$ sicher nicht identisch in x_i verschwinden kann. Ist $B(\xi, \eta)$ eine vollständige m^{te} Potenz einer Linearform der ξ, η, die auch ein Teiler von $A(\xi, \eta)$ ist, so ist $N = m$, und die m^{te} Polare $\mathsf{P}_{m,0}(a_i, b_i; x_i)$ wird zur m^{ten} Potenz einer nicht identisch verschwindenden Linearform in x_i. Bedenken wir, daß in der Entwicklung (11) aus denselben Gründen, wie oben bei der Diskriminante, jede Polare auch als Polare von $\mathsf{P}(x_i, b_i)$ (bis auf einen Zahlenkoeffizienten) aufgefaßt werden kann und daher aus jeder der folgenden Polaren durch wiederholte Anwendung des Polarenprozesses

$$a_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

und Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl erhalten werden kann, so folgt, daß die Bedingungen (13) durch eine einzige ersetzt werden können:

$$\mathsf{P}_{N-1,0}(a_i, b_i; x_i) = 0.$$

Ganz analoge Resultate gelten, wenn wir die Formen $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$ vertauschen, und daher können wir das Resultat formulieren: *Damit $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$ bis auf von 0 verschiedene Zahlenfaktoren vollständige Potenzen eines und desselben Linearfaktors werden, ist notwendig und hinreichend, daß die beiden Polaren $\mathsf{P}_{m-1,0}(a_i, b_i; x_i)$ und $\mathsf{P}_{0,n-1}(a_i, b_i; y_i)$ identisch in x_i bzw. y_i verschwinden, während $\mathsf{P}_{m,0}(a_i, b_i; x_i)$ zur m^{ten} Potenz einer Linearform in x_i und $\mathsf{P}_{0,n}(a_i, b_i; y_i)$ zur n^{ten} Potenz einer Linearform*

in y_i werden. Und dieser Satz gilt für jedes Paar nicht identisch verschwindender binärer Formen, wie man ganz analog wie oben im Fall der Diskriminante mit Hilfe einer geeigneten linearen Transformation der Variabeln ξ, η zeigt.

4. *Resultante.* Wir gehen nun dazu über, das allgemeinste Paar von linearen Substitutionen

$$(14)\quad (S)\; a_i' = \sum_{k=0}^{k=n} s_{ik} a_k \;\; (i = 0, \ldots, n); \quad (R)\; b_i' = \sum_{k=1}^{k=m} r_{ik} b_k \;\; (i = 0, \ldots, m)$$

zu bestimmen, welches $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich überführt (bis auf einen Zahlenfaktor). Die Lösung dieses Problems ist im folgenden Satz enthalten:

Besitzt ein System (14) *von* $n + m + 2$ *linearen Funktionen* a_i, b_i *von* a_k, *bzw.* b_k *die Eigenschaft, daß* $\mathsf{P}(a_i', b_i')$ *von einem von* 0 *verschiedenen Zahlenfaktor abgesehen, gleich* $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ *ist, so entsteht das entsprechende Paar von linearen Substitutionen* S, R, *indem man auf* ξ, η *eine geeignete lineare Substitution* (*mit von* 0 *verschiedener Determinante*) *ausübt und die dadurch induzierten Substitutionen der Koeffizienten von* $A(\xi,\eta)$ *bzw.* $B(\xi,\eta)$ *mit der Multiplikation aller Koeffizienten von* $B(\xi,\eta)$ *mit einer geeigneten Konstante kombiniert.* — Beim Beweise nehmen wir an, daß S, R von 0 verschiedene Determinanten haben. Später werden wir uns auch von dieser Voraussetzung frei machen können.

Führt das System S, R die Resultante $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich über, so führt es auch jede gemischte Polare $\mathsf{P}_{k_1,k_2}(a_i, b_i; x_i, y_i)$ in sich über, wenn man auch auf die x_i S, auf die y_i R zugleich anwendet. Verschwindet für ein Wertsystem der a_i, b_i eine Polare P_{k_1,k_2} identisch, d. h. für jeden Wert der x_i, y_i, so ist daher, ähnlich wie bei der Diskriminante, dasselbe für das Wertsystem a_i', b_i', welches a_i, b_i vermöge S, R entspricht, der Fall. Berücksichtigen wir nun den Satz aus 3., so folgt hieraus: Jedem System von zwei Formen $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$, die bis auf von 0 verschiedene Faktoren der n^{ten}, bzw. der m^{ten} Potenz eines und desselben Linearfaktors gleich sind, wird vermöge S, R ein System von zwei solchen Formen zugeordnet, die wiederum bis auf von 0 verschiedene Konstanten der n^{ten} bzw. m^{ten} Potenz eines und desselben Linearfaktors gleich werden. Wir können daher auf S den Hilfssatz der Nr. 1 anwenden, und sehen, daß S durch eine lineare Substitution der ξ, η

$$(15)\qquad \xi = p\xi' + \bar{p}\eta', \quad \eta = q\xi' + \bar{q}\eta'$$

induziert wird. Ein analoges Resultat gilt auch für R. Auch R ist induziert durch eine lineare Substitution der ξ, η

$$(15')\qquad \xi = \pi\xi' + \bar{\pi}\eta', \quad \eta = \varkappa\xi' + \bar{\varkappa}\eta'.$$

Es sei nun $S(\xi, \eta) = u\xi + v\eta$. Setzen wir für $A(\xi, \eta)$ $(u\xi + v\eta)^n$, für $B(\xi, \eta)$ $(u\xi + v\eta)^m$, so ergibt sich aus der obigen Bemerkung, daß für alle u, v

$$u(p\xi' + \bar{p}\eta') + v(q\xi' + \bar{q}\eta') \text{ und } u(\pi\xi' + \bar{\pi}\eta') + v(\varkappa\xi' + \bar{\varkappa}\eta')$$

als Formen in ξ', η' proportional sind, d. h., daß

$$(up + vq)(u\bar{\pi} + v\bar{\varkappa}) = (u\pi + v\varkappa)(u\bar{p} + v\bar{q})$$

identisch in u, v ist. Daher ist entweder

$$u\pi + v\varkappa = c(up + vq), \quad u\bar{\pi} + v\bar{\varkappa} = c(u\bar{p} + v\bar{q})$$

oder

$$u\pi + v\varkappa = c(u\bar{\pi} + v\bar{\varkappa}), \quad up + vq = c(u\bar{p} + v\bar{q}),$$

wo c eine nicht verschwindende Konstante ist. Das zweite Gleichungssystem ist aber unmöglich, da (15) und (15′) umkehrbar sind. Aus dem ersten Gleichungssystem folgt aber

$$\pi = cp, \; \bar{\pi} = c\bar{p}, \; \varkappa = cq, \; \bar{\varkappa} = c\bar{q}.$$

Folglich entsteht R, wenn man auf $B(\xi, \eta)$ die lineare Substitution (14) anwendet und dann noch alle Koeffizienten mit einer willkürlichen von 0 verschiedenen Konstante c^m multipliziert. Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Untersuchung der allgemeinsten linearen Substitutionen, die die Resultante in sich überführen und bei denen a_i' nicht allein von den a abzuhängen braucht und ebenso b_i' nicht allein von den b_i, ist viel schwieriger. Wir schicken ihr zwei Hilfssätze voraus.

5. *Das Verschwinden der simultanen Polaren der Resultante.* Wir werden erstens noch einen Satz über das Verschwinden der Polaren von P brauchen, der sich aber jetzt auf *simultane* Polaren bezieht: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $A(\xi, \eta)$ zur n^{ten} Potenz einer Linearform und $B(\xi, \eta)$ durch $A(\xi, \eta)$ teilbar wird, ist, daß P und ihre $n-1$ ersten simultanen Polaren identisch verschwinden, während die n^{te} simultane Polare zur n^{ten} Potenz einer Linearform in den Unbestimmten x, y wird.* — Es sei zuerst $a_0 \neq 0$.

Um die obige Bedingung als notwendig zu erweisen, bezeichnen wir die n-fache Wurzel von $A(t)$ durch t_1, und es sei $B(t) = (t - t_1)^n B'(t)$. Aus der Formel (7) erhalten wir für die Wurzeln von $A(t) + \lambda X(t)$ die Entwicklungen

$$t_1 + \varepsilon^i \left[\frac{1}{a_0} X(t_1) \lambda\right]^{\frac{1}{n}} + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist. Bilden wir nun die Resultante von $A(t) + \lambda X(t)$ und $B'(t)(t - t_1)^n + \lambda Y(t)$, so entsteht:

$$\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i + \lambda y_i)$$
$$= (a_0 + \lambda x_0)^m \prod_{i=1,\dots,n} \left\{ B'(t_1 + \cdots) \left[\varepsilon^i \left(\frac{1}{a_0} X(t_1)\lambda \right)^{\frac{1}{n}} + \cdots \right]^n + \lambda Y(t_1 + \cdots) \right\}$$
$$= (a_0 + \lambda x_0)^m \prod_{i=1,\dots,n} \left\{ B'(t_1) \frac{1}{a_0} X(t_1)\lambda + Y(t_1)\lambda + \cdots \right\}$$
$$= (a_0 + \lambda x_0)^m \left\{ \frac{1}{a_0} B'(t_1) X(t_1) + Y(t_1) \right\}^n \lambda^n + \cdots$$
$$= \{ B'(t_1) X(t_1) + a_0 Y(t_1) \}^n \lambda^n + \cdots$$

Da aber $a_0 \neq 0$ ist, so kann der Ausdruck in der Klammer nicht identisch verschwinden, und folglich sind die angegebenen Bedingungen wirklich notwendig.

Es seien nun die im Satz aufgestellten Bedingungen erfüllt, und es sei t_1 eine Wurzel, die $A(t)$ mit $B(t)$ gemeinsam hat, ν_1 bzw. μ_1 ihre Mehrfachheiten in $A(t)$ und $B(t)$. Haben $A(t)$ und $B(t)$ noch eine weitere Wurzel gemeinsam, so sei t_2 eine solche, ν_2, μ_2 ihre Mehrfachheiten in $A(t)$, bzw. $B(t)$. Bilden wir die Resultante von $A(t) + \lambda X(t)$ und $B(t) + \lambda Y(t)$, indem wir in die zweite Funktion alle Wurzeln der ersten Funktion einsetzen und das über alle Wurzeln von $A(t) + \lambda X(t)$ erstreckte Produkt mit $(a_0 + \lambda x_0)^m$ multiplizieren, so liefern die t_1 entsprechenden Wurzeln den Beitrag

$$\prod_{i=1,\dots,\nu_1} \left\{ B\left[t_1 + \varepsilon_1^i \left(\frac{1}{a_0} X(t_1)\lambda \right)^{\frac{1}{\nu_1}} + \cdots \right] + \lambda Y(t_1 + \cdots) \right\} \tag{16}$$
$$= \prod_{i=1,\dots,\nu_1} \left\{ c_1 \varepsilon_1^{i\mu_1} \left(\frac{1}{a_0} X(t_1)\lambda \right)^{\frac{\mu_1}{\nu_1}} + \lambda Y(t_1) + \cdots \right\}$$

wo c_1 eine von 0 verschiedene Konstante, ε_1 eine primitive ν_1^{te} Einheitswurzel ist. Gibt es nun nur eine gemeinsame Wurzel t_1 von $A(t)$ und $B(t)$, so fängt die Entwicklung von $\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i + \lambda y_i)$ nach Potenzen von λ mit einem Gliede an, dessen Ordnung in bezug auf λ der kleineren von den Zahlen μ_1 und ν_1 gleich ist. Nach unserer Annahme muß also $\mu_1 \geqq n$, $\nu_1 \geqq n$ sein. Da aber ν_1 nicht größer als der Grad n von $A(t)$ sein kann, so folgt, daß $\nu_1 = n$, $\mu_1 \geqq n$ ist, w. z. b. w.

Mehr als eine gemeinsame Wurzel können aber $A(t)$ und $B(t)$ nicht haben. Denn sonst würden die t_2 entsprechenden Wurzeln von $A(t) + \lambda X(t)$ zu $\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i, b_i + \lambda y_i)$ den Beitrag

$$\prod_{i=1,\dots,\nu_2} \left\{ c_2 \varepsilon_2^{i\mu_2} \left(\frac{1}{a_0} X(t_2) \right)^{\frac{\mu_2}{\nu_2}} + \lambda Y(t_2) + \cdots \right\}$$

liefern, wo $c_2 \neq 0$ und ε_2 eine ν_2^{te} primitive Einheitswurzel ist. Dann aber würde, wie wir zeigen wollen, die erste nicht verschwindende simultane Polare von P durch zwei wesentlich verschiedene Linearformen in x, y teilbar sein, was der Annahme widerspricht, daß sie eine reine n^{te} Potenz ist. In der Tat ist, wie man sich leicht überzeugt, der Koeffizient der niedrigsten Potenz von λ in (16) stets von der Form

$$\pm\,(d_1 X(t_1) + d_1' Y(t_1))^{p_1}, \qquad p_1 > 0$$

wo eine von den Zahlen d_1, d_1' von 0 verschieden ist. Denn ist $\mu_1 > \nu_1$, so ist $d_1 = 0$, $d_1' = 1$, $p_1 = \nu_1$; für $\mu_1 < \nu_1$ ist $d_1 = \frac{c_1^{\frac{\nu_2}{\mu_1}}}{a_0}$, $d_1' = 0$, $p_1 = \mu_1$; ist aber $\mu_1 = \nu_1$, so folgt $d_1 = \frac{c_1}{a_0}$, $d_1' = 1$, $p_1 = \mu_1 = \nu_1$. Ebenso hat der Koeffizient der niedrigsten Potenz von λ im von t_2 herrührenden Beitrag zu $\mathsf{P}(a_i + \lambda x_i,\ b_i + \lambda y_i)$ die Form

$$\pm\,(d_2 X(t_2) + d_2' Y(t_2))^{p_2}, \qquad p_2 > 0$$

wo eine von den Zahlen d_2, d_2' von 0 verschieden ist. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß eine Gleichung von der Form

$$d_1 X(t_1) + d_1' Y(t_1) = e(d_2 X(t_2) + d_2' Y(t_2)), \tag{17}$$

wo e eine konstante Zahl ist, unmöglich ist. Da aber x_i, y_i unabhängige Unbestimmte sind, so folgt aus (17) durch Vergleichung der Koeffizienten von x_0, x_1, y_0, y_1:

$$d_1 = ed_2,\quad d_1 t_1 = ed_2 t_2,\quad d_1' = ed_2',\quad d_1' t_1 = d_2' e t_2,$$
$$ed_2 t_1 = ed_2 t_2,\quad ed_2' t_1 = ed_2' t_2.$$

Da aber $t_1 \neq t_2$ ist, so müßte entweder $e = 0$, oder $d_2 = d_2' = 0$ sein. Das erste ist unmöglich, da sonst nach (17) $d_1 = 0$, $d_1' = 0$ sein müßte, während eine von den Zahlen d_1, d_1' von 0 verschieden ist, ebenso ist das zweite unmöglich, womit unser Satz bewiesen ist. Von der Einschränkung $a_0 \neq 0$ können wir uns ganz analog wie oben durch eine geeignete lineare Substitution der ξ, η befreien.

6. *Über die Reduzibilität gewisser bilinearer Ausdrücke.* Den zweiten Hilfssatz wollen wir in etwas allgemeinerer Form aufstellen und beweisen, als er im Folgenden zur Anwendung kommt.

Es seien

$$\alpha_0(p_i), \ldots, \alpha_\varkappa(p_i) \qquad \varkappa \geq 1 \tag{18}$$

ein System von ganz beliebigen Funktionen gewisser Parameter p_i, von der Art jedoch, daß keine Relation

$$c_0\alpha_0(p_i) + c_1\alpha_1(p_i) + \cdots + c_\varkappa\alpha_\varkappa(p_i) = 0$$

identisch in den p_i besteht, in der nicht alle c_λ verschwinden. Es sei

(19) $$\beta_0(q_i), \ldots, \beta_\lambda(q_i) \qquad \lambda \geqq 1$$

ein analoges System von ganz beliebigen Funktionen gewisser Parameter q_i *(die von den* p_i *ganz unabhängig sind), von der Art, daß auch zwischen den* β *keine Relation*

$$c_0'\beta_0(q_i) + \cdots + c_\lambda'\beta_\lambda(q_i) = 0$$

identisch in den q_i *besteht, es sei denn, daß alle* c_k' *verschwinden. Man fasse die* α *mit Hilfe der Potenzprodukte der Unbestimmten* ξ, η *zu einer Form* $\varkappa^{ten}$ *Grades in* ξ, η *zusammen:*

$$f(\xi, \eta) = \alpha_0\xi^\varkappa + \alpha_1\xi^{\varkappa-1}\eta + \cdots + \alpha_\varkappa\eta^\varkappa.$$

Analog bilde man aus den β *die Form*

$$\varphi(\xi, \eta) = \beta_0\xi^\lambda + \beta_1\xi^{\lambda-1}\eta + \cdots + \beta_\lambda\eta^\lambda.$$

Man bilde nun das Produkt von $f(\xi, \eta)$ *und* $\varphi(\xi, \eta)$

$$\psi(\xi, \eta) = \gamma_0\xi^{\varkappa+\lambda} + \gamma_1\xi^{\varkappa+\lambda-1}\eta + \cdots + \gamma_{\varkappa+\lambda}\eta^{\varkappa+\lambda},$$

wo (unter $\alpha_{\varkappa+1}, \alpha_{\varkappa+2}, \cdots, \beta_{\lambda+1}, \beta_{\lambda+2}, \cdots 0$ *verstanden)*

(20) $$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0,\ \gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0, \cdots, \gamma_i = \alpha_0\beta_i + \cdots + \alpha_i\beta_0, \cdots, \gamma_{\varkappa+\lambda} = \alpha_\varkappa\beta_\lambda$$

ist, und es gebe ein solches System von Konstanten:

$$u_0, u_1, \cdots, u_{\varkappa+\lambda},$$

die nicht sämtlich verschwinden, daß

(21) $$u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_{\varkappa+\lambda}\gamma_{\varkappa+\lambda} = F(p_i)\Phi(q_i)$$

gilt, wo $F(p_i)$ *nur von den* p_i *abhängt,* $\Phi(q_i)$ *nur von den* q_i. *Dann gibt es, behaupten wir, zwei solche Zahlen* ξ_0, η_0, *daß*

$$u_0\gamma_0 + \cdots + u_{\varkappa+\lambda}\gamma_{\varkappa+\lambda} = \psi(\xi_0, \eta_0)$$

gilt, und F *und* Φ *lassen sich in der Form schreiben*

$$F = c(\xi_0^\varkappa\alpha_0 + \xi_0^{\varkappa-1}\eta_0\alpha_1 + \cdots + \eta_0^\varkappa\alpha_\varkappa) = cf(\xi_0, \eta_0),$$
$$\Phi = c'(\xi_0^\lambda\beta_0 + \cdots + \eta_0^\lambda\beta_\lambda) = c'\varphi(\xi_0, \eta_0),$$

wo c, c' *Konstanten sind und* $cc' = 1$ *ist.*

Setzen wir in (21) für die γ die Ausdrücke (20) ein und ordnen nach den α, so entsteht

(22) $$\alpha_0(u_0\beta_0 + u_1\beta_1 + \cdots) + \alpha_1(u_1\beta_0 + u_2\beta_1 + \cdots) + \cdots + \alpha_i(u_i\beta_0 + u_{i+1}\beta_1 + \cdots) + \cdots$$

Hier sind die Koeffizienten der α_i Linearformen der β_i mit Koeffizienten u_k, und als Koeffizienten kommen *alle* u_i vor. Würden daher sämtliche Koeffizienten der α_i identisch in den q_i verschwinden, so müßten alle u_i gleich 0 sein, was nicht der Fall ist. Setzen wir für die q_i ein solches

Wertsystem ein, daß nicht alle diese Koeffizienten der α_i gleich 0 werden, so entsteht aus (22) eine wegen der linearen Unabhängigkeit der α_i nicht identisch verschwindende lineare Verbindung der α_i. Daher ist für dieses Wertsystem $\Phi \neq 0$ und wir erhalten für $F(p_i)$ die Darstellung

$$F = v_0\alpha_0 + v_1\alpha_1 + \cdots + v_\varkappa\alpha_\varkappa.$$

Ebenso erhalten wir für $\Phi(q_i)$ die Darstellung

$$\Phi = w_0\beta_0 + w_1\beta_1 + \cdots + w_\lambda\beta_\lambda.$$

Zugleich haben wir mitbewiesen, daß zwischen den γ_i keine Relation

$$u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_{\varkappa+\lambda}\gamma_{\varkappa+\lambda} = 0$$

bestehen kann, in der wenigstens ein u von 0 verschieden ist.

Wir behaupten weiter, daß die Relation

$$(23)\quad (u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_{\varkappa+\lambda}\gamma_{\varkappa+\lambda}) = (v_0\alpha_0 + \cdots + v_\varkappa\alpha_\varkappa)(w_0\beta_0 + \cdots + w_\lambda\beta_\lambda)$$

nicht nur identisch in den p_i, q_i besteht, sondern auch identisch in den α_i, β_i, wenn man die γ_i durch (20) definiert. Denn bringen wir in (23) alles auf die linke Seite, setzen für die γ_i die Ausdrücke (20) ein und ordnen alles nach den α_i, so werden die Koeffizienten Linearformen in den β_i, die identisch in den q_i verschwinden, deren Koeffizienten daher infolge der linearen Unabhängigkeit der β_i sämtlich gleich 0 sind. Daher besteht die Gleichung (23) identisch in den α_i, β_i, wenn man unter γ_i die Ausdrücke (20) versteht. Jetzt können wir etwa so schließen:

Bemerken wir, daß ein Produkt $\alpha_i\beta_k$ nur in γ_{i+k} vorkommt, so folgt, daß wenn in $\sum v_i\alpha_i$ ein gewisses $\alpha_{i'}$ wirklich vorkommt und in $\sum w_k\beta_k$ ein gewisses $\beta_{k'}$ wirklich vorkommt, daß dann in $\sum u_i\gamma_i$ sicher $\gamma_{i'+k'}$ wirklich vorkommen. Daher kommen dann auf der linken Seite von (23) alle Produkte $\alpha_i\beta_k$ wirklich vor, für die $i+k = i'+k'$. Ist daher für ein i', welches weder 0 noch $\varkappa$ gleich ist, $v_{i'} \neq 0$, so sind alle v_i und alle w_i von 0 verschieden. Denn kommt dann in $\sum w_k\beta_k$ etwa $\beta_{k'}$ wirklich vor und ist etwa $k' > 0$, so ist $v_{i'+1} \neq 0$, $w_{k'-1} \neq 0$. Stellen wir nun $\alpha_{i'+1}$ mit $\beta_{k'}$ zusammen, so folgt, sofern $i'+1 < \varkappa$ ist, $v_{i'+2} \neq 0$ usw. Daher sind dann alle $v_{i'}, v_{i'+1}, \cdots, v_\varkappa$ von 0 verschieden. Ist aber $k' = 0$, so schließen wir, daß zugleich mit $v_{i'}$, w_0 auch $v_{i'-1}$, w_1 von 0 verschieden sind, und gehen von $k' = 1$ aus. Ist nun $k' < \lambda$, so sind zugleich mit $v_{i'}$ und $w_{k'}$ auch $v_{i'-1}$, $w_{k'+1}$ von 0 verschieden. Ebenso schließen wir, indem wir $\alpha_{i'}$ mit $\beta_{k'}$ zusammenstellen, daß $v_{i'-1}\cdots, v_0$ von 0 verschieden sind. Ist aber $k' = \lambda$, so ist, wie bereits bemerkt, $w_{k'-1} \neq 0$ und unsere Schlüsse sind ohne weiteres anwendbar. Zugleich ergibt sich für $\lambda > 1$, daß ein $w_{k'} \neq 0$ ist mit $0 < k' < \lambda$, daher sind dann alle $w_{k'} \neq 0$. Und

für $\lambda = 1$ folgt dies aus dem vorhergehenden. — Kommt nun in $\sum v_i \alpha_i$ nur α_0 vor, so kann in $\sum w_k \beta_k$ auch nur β_0 vorkommen. Denn kommt hier etwa β_λ vor, so müßten auch α_1 und $\beta_{\lambda-1}$ wirklich vorkommen usw Es sind daher nur drei Fälle möglich:

1. $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_\varkappa = 0$; $v_1 = 0, \cdots, w_\lambda = 0$, $u_0 = v_0 w_0$, $u_1 = 0, \cdots, u_{\varkappa+\lambda} = 0$. Dann kann für $\xi_0 \sqrt[\varkappa+\lambda]{u_0}$ genommen werden, $\eta_0 = 0$.

2. $v_0 = 0, \cdots, v_{\varkappa-1} = 0$; $w_0 = 0$, $w_1 = 0, \cdots, w_{\lambda-1} = 0$; $u_0 = 0, \cdots, u_{\varkappa+\lambda-1} = 0$, $u_{\varkappa+\lambda} = v_\varkappa w_\lambda$. Hier ist $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = \sqrt[\varkappa+\lambda]{u_{\varkappa+\lambda}}$.

3. Es sind sämtliche Zahlen u_i, v_i, w_i von 0 verschieden. Dann folgt aus (23), zunächst für $i \leqq k$, $k \leqq \lambda$, und dann allgemein

$$v_i w_k = u_{i+k},\quad v_i w_0 = u_i = v_0 w_i,\quad \frac{v_i}{v_0} = \frac{u_i}{v_0 w_0} = \frac{u_i}{u_0} = \frac{w_i}{w_0},$$

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^i = \frac{u_i}{u_0} = \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^i = \frac{v_i}{v_0} = \frac{w_i}{w_0} = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^i.$$

Daher können wir $\xi_0 = \sqrt[\varkappa+\lambda]{u_0}$, $\eta_0 = \sqrt[\varkappa+\lambda]{u_0}\,\frac{u_1}{u_0}$, $c = \frac{v_0}{\sqrt[\varkappa+\lambda]{u_0^\varkappa}}$, $c' = \frac{w_0}{\sqrt[\varkappa+\lambda]{u_0^\lambda}}$ setzen, womit unser Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

7. *Die Resultante bei allgemeinster Substitution ihrer Elemente.* Jetzt können wir endlich an den Beweis des folgenden Satzes gehen:

Es sei eine lineare Substitution S der Koeffizienten a_i, b_i von $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ gegeben, durch die die Resultante $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich übergeht, d. h. ein solches System linearer Formen

$$\text{(24)}\qquad \begin{aligned} a_i' &= s_i(a, b) = \mathsf{A}_i(a) + \mathfrak{A}_i(b) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)\\ b_i' &= s_{n+i+1}(a, b) = \mathfrak{B}_i(a) + \mathsf{B}_i(b) \qquad (i = 0, 1, \cdots, m) \end{aligned} \qquad (S)$$

wo

$$\text{(25)}\qquad \begin{aligned} \mathsf{A}_i(a) &= \sum_{k=0}^{k=n} \alpha_{i,k} a_k, \quad \mathfrak{A}_i(b) = \sum_{k=0}^{k=m} \mathfrak{a}_{i,k} b_k \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)\\ \mathfrak{B}_i(a) &= \sum_{k=0}^{k=n} \mathfrak{b}_{i,k} a_k, \quad \mathsf{B}_i(b) = \sum_{k=0}^{k=m} \beta_{i,k} b_k \qquad (i = 0, 1, \cdots, m) \end{aligned}$$

ist, daß $\mathsf{P}(a_i', b_i')$ bis auf einen nicht verschwindenden Faktor gleich $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ ist. Dann entsteht S, indem man eine geeignete lineare umkehrbare Substitution der Variabeln ξ, η mit den folgenden Operationen kombiniert:

1. *Im Falle $m = n > 1$ mit einer linearen umkehrbaren Substitution, die auf die Formen $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$ selbst ausgeübt wird, indem man neue Formen*

$$\text{(26)}\qquad \pi A(\xi, \eta) + \bar{\pi} B(\xi, \eta),\qquad \varkappa A(\xi, \eta) + \bar{\varkappa} B(\xi, \eta) \qquad \left(\begin{vmatrix} \pi & \bar{\pi} \\ \varkappa & \bar{\varkappa} \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

einführt, wo π, $\bar{\pi}$, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$ Konstanten sind.

2. *Im Falle $m > n$ mit derjenigen Substitution der Koeffizienten, die entsteht, wenn man für $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ neue Formen*

$$\pi A(\xi, \eta), \quad \varkappa B(\xi, \eta) + T(\xi, \eta) A(\xi, \eta)$$

einführt, wo π, $\varkappa$ nicht verschwindende Konstanten sind, $T(\xi, \eta)$ aber eine Form in ξ, η vom Grade $m - n$ ist.

3. *Im Falle $m = n = 1$ entweder, wie im Falle 1., mit einer linearen umkehrbaren Substitution (26) der Formen $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ selbst, oder auch mit einer solchen Substitution und der nachträglichen Vertauschung von a_1' und b_0'. Im Falle 3. entsteht also die Matrix $\begin{pmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & b_1' \end{pmatrix}$, indem man entweder die Matrix $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$ oder ihre Transponierte vorn und hinten mit Matrizen mit nicht verschwindenden Determinanten multipliziert.*

Beim Beweise nehmen wir vorläufig an, daß S eine umkehrbare Substitution ist. — Es sei zunächst $m \geqq n > 1$. Wir benutzen vor allem die Tatsache, daß S zugleich mit $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ auch jede simultane Polare von $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ in sich überführt. Nach dem Hilfssatz der Nr. 5 folgt hieraus, daß jedes Paar von Formen $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$, in dem $A(\xi, \eta)$ die n^{te} Potenz einer Linearform und $B(\xi, \eta)$ durch $A(\xi, \eta)$ teilbar ist, durch S in ein solches Paar von Formen $A'(\xi, \eta)$, $B'(\xi, \eta)$ übergeführt wird, in dem wiederum $A'(\xi, \eta)$ die n^{te} Potenz einer Linearform, $B'(\xi, \eta)$ aber durch $A'(\xi, \eta)$ teilbar ist.

Wir setzen nun $\bar{A}(\xi, \eta) = (u\xi + v\eta)^n$, $\bar{B}(\xi, \eta) = (u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$, wo u, v und die Koeffizienten $p_0, p_1, \cdots, p_{m-n}$ der Form $P(\xi, \eta)$, die mit Binomialkoeffizienten geschrieben wird, unabhängige Unbestimmte sind. Für $n = m$ sei für $P(\xi, \eta)$ einfach eine Unbestimmte p_0 gesetzt. Setzen wir in die Linearformen $s_i(a, b)$ die Koeffizienten von $(u\xi + v\eta)^n$ und $(u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$, so entstehen eindeutig bestimmte Ausdrücke

$$\mathfrak{A}_i(u, v, p), \quad \mathsf{B}_i(u, v, p), \quad \mathsf{A}_i(u, v), \quad \mathfrak{B}_i(u, v), \tag{27}$$

wo $\mathfrak{A}_i$, B_i homogen linear in den p, alle Ausdrücke (27) aber homogen vom n^{ten} Grade in den u, v sind. Umgekehrt sind durch die Funktionen (27) die Funktionen (24) und daher auch S eindeutig bestimmt, da alle Koeffizienten von $(u\xi + v\eta)^n$ und $(u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$ linear unabhängig sind. Für die Koeffizienten von $(u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$ folgt dies aus dem Hilfssatz der Nr. 6. Entsprechen nun unseren Formen $\bar{A}(\xi, \eta)$, $\bar{B}(\xi, \eta)$ vermöge S etwa die Formen $\bar{A}'(\xi, \eta)$, $\bar{A}'(\xi, \eta) P'(\xi, \eta)$, so erhalten wir aus der Bedingung, daß auch $\bar{A}'(\xi, \eta)$ die n^{te} Potenz einer Linearform ist, die Gleichungen:

$$
(28)\qquad \begin{aligned}&[\mathsf{A}_i(u,v)+\mathfrak{A}_i(u,v,p)]^n\\ &=[\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)]^{n-i}[\mathsf{A}_n(u,v)+\mathfrak{A}_n(u,v,p)]^i,\quad (i=0,\cdots,n)\end{aligned}
$$

$$
(29)\qquad \begin{aligned}&[\mathsf{A}_i(u,v)+\mathfrak{A}_i(u,v,p)][\mathsf{A}_k(u,v)+\mathfrak{A}_k(u,v,p)]\\ &=[\mathsf{A}_{i+k}(u,v)+\mathfrak{A}_{i+k}(u,v,p)][\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)],\\ &[\mathsf{A}_{n-i}(u,v)+\mathfrak{A}_{n-i}(u,v,p)][\mathsf{A}_{n-k}(u,v)+\mathfrak{A}_{n-k}(u,v,p)]\\ &=[\mathsf{A}_{n-k-i}(u,v)+\mathfrak{A}_{n-k-i}(u,v,p)][\mathsf{A}_n(u,v)+\mathfrak{A}_n(u,v,p)],\end{aligned}
$$

die identisch in u, v, p bestehen müssen.

Aus (28) folgt, daß jedenfalls entweder $\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)$ oder $\mathsf{A}_n(u,v)+\mathfrak{A}_n(u,v,p)$ von 0 verschieden ist. Es sei etwa

$$
\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)\neq 0.
$$

Dann folgt aus den Relationen (29) für $\bar{A}'(\xi,\eta)$ die Darstellung

$$
\bar{A}'(\xi,\eta)=[\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)]\left[\xi+\frac{\mathsf{A}_1(u,v)+\mathfrak{A}_1(u,v,p)}{\mathsf{A}_0(u,v)+\mathfrak{A}_0(u,v,p)}\,\eta\right]^n,
$$

und hieraus, da $\bar{A}'(\xi,\eta)$ ganz in u, v, p, ξ, η und höchstens linear in den p ist,

$$
(30)\qquad \bar{A}'(\xi,\eta)=l(p)(p'u\xi+q'v\xi+\bar{p}'u\eta+\bar{q}'v\eta)^n,
$$

wo $l(p)$ ganz linear in den p_i ist. Da $\bar{A}'(\xi,\eta)$ vom Grade n in u, v ist, so wäre außerdem nur noch der Fall möglich:

$$
(31)\qquad \bar{A}'(\xi,\eta)=L(p,u,v)(k_1\xi+k_2\eta)^n,
$$

wo k_1, k_2 numerische Konstanten sind. Dann würden sich aber die Linearformen $s_i(a,b)$ $(i=0,\cdots,n)$ in (24) nur um multiplikative Konstanten von einander unterscheiden, was der Annahme widerspricht, daß S umkehrbar ist. Aus demselben Grunde ist $\begin{vmatrix} p' & q' \\ \bar{p}' & \bar{q}' \end{vmatrix}\neq 0$, da sonst die Linearformen $p'u+q'v$ und $\bar{p}'u+\bar{q}'v$ proportional wären und wiederum eine Darstellung (31) bestehen müßte. Wir führen nun neue Varjablen

$$
p'\xi+\bar{p}'\eta,\quad q'\xi+\bar{q}'\eta
$$

ein, die wir wieder als ξ, η bezeichnen. Dieser linearen Substitution der ξ, η entspricht eine lineare Substitution S^* der Koeffizienten a_i, b_i der allgemeinen Formen $\bar{A}(\xi,\eta)$, $\bar{B}(\xi,\eta)$. Wir betrachten nun die Substitution SS^*, die wir wieder durch S bezeichnen, und beweisen für sie die Behauptungen unseres Satzes, was offenbar genügt. Wir können daher annehmen, daß

$$
(32)\qquad \bar{A}'(\xi,\eta)=l(p)(u\xi+v\eta)^n
$$

ist. Es sei $l(p)=h(p)+c$, wo $h(p)$ linear homogen in den p_i und c eine Konstante ist. Aus (32) folgt nun, daß alle Funktionen

$$\mathfrak{A}_0(u, v, p),\ \mathfrak{A}_1(u, v, p), \cdots, \mathfrak{A}_n(u, v, p),$$

die in p linear sind, durch $h(p)$ teilbar sind. Nun sind $\mathfrak{A}_i(u, v, p)$ lineare Kombinationen der Koeffizienten von $(u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$, und daher ist der Hilfssatz der Nr. 6 anwendbar, wenn $m > n$. Dann folgt aus

$$\mathfrak{A}_1(u, v, p) = nh(p)u^{n-1}v,$$

daß $u^{n-1}v$ sich in der Form $c'(u\xi_0 + v\eta_0)^n$ darstellen läßt. Dies ist aber offenbar unmöglich, da u und v ja Unbestimmte sind. *Daher ist $h(p) = 0$ für $m > n$.* Dann gilt aber

$$\mathfrak{A}_0(u, v, p) = 0, \cdots, \mathfrak{A}_n(u, v, p) = 0, \qquad \mathsf{A}_0(u, v) = cu^n, \cdots, \mathsf{A}_n(u, v) = cv^n,$$
$$\mathfrak{A}_0(b) = 0, \cdots, \mathfrak{A}_n(b) = 0, \quad \mathsf{A}_0(a) = ca_0, \cdots, \mathsf{A}_i(a) = ca_i, \cdots, \mathsf{A}_n(a) = ca_n,$$

$$a_i' = s_i(a, b) = ca_i \qquad (i = 0, \cdots, n). \tag{33}$$

Ist aber $m = n$ und $P(\xi, \eta) = p_0$, so ist $h(p) = h_0 p_0$, wo h_0 eine Zahl ist, und aus (32) folgt

$$\mathfrak{A}_0(u, v, p) = h_0 p_0 u^n, \cdots, \mathfrak{A}_n(u, v, p) = h_0 p_0 v^n; \ \mathfrak{A}_0(b) = h_0 b_0, \cdots, \mathfrak{A}_n(b) = h_0 b_n,$$
$$\mathsf{A}_0(u, v) = cu^n, \cdots, \mathsf{A}_n(u, v) = cv^n; \ \mathsf{A}_0(a) = ca_0, \cdots, \mathsf{A}_n(a) = ca_n$$

$$a_i' = s_i(a, b) = ca_i + h_0 b_i. \tag{34}$$

Da aber $m = n$ ist, kann man $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ mit einander vertauschen in unserer Betrachtung. Daher gilt zugleich mit (34) auch

$$b_i' = s_{n+i+1}(a, b) = c' a_i + h_0' b_i,$$
$$A'(\xi, \eta) = cA(\xi, \eta) + h_0 B(\xi, \eta); \quad B'(\xi, \eta) = c' A(\xi, \eta) + h_0' B(\xi, \eta).$$

Und hier muß $\begin{vmatrix} c_0 & h_0 \\ c_0' & h_0' \end{vmatrix}$ von 0 verschieden sein, da sonst die Resultante von $A'(\xi, \eta)$ und $B'(\xi, \eta)$ identisch verschwinden würde. Damit ist unser Satz für $m = n > 1$ bewiesen, und wir können von jetzt an $m > n$ annehmen.

Wir untersuchen nun die letzten $m + 1$ Linearformen $s_i(a, b)$ oder vielmehr die aus ihnen entstehenden $\mathfrak{B}_i(u, v) + \mathsf{B}_i(u, v, p)$. Da die Form $\bar{B}'(\xi, \eta)$, in die $\bar{B}(\xi, \eta) = (u\xi + v\eta)^n P(\xi, \eta)$ durch S übergeführt wird, durch $\bar{A}'(\xi, \eta)$ teilbar ist, $\bar{A}'(\xi, \eta)$ aber nach unseren Annahmen durch $\bar{A}(\xi, \eta)$ teilbar ist, so läßt sich $\bar{B}'(\xi, \eta)$ in der Form darstellen:

$$\bar{B}'(\xi, \eta) = (u\xi + v\eta)^n P'(\xi', \eta), \tag{35}$$

wo $P'(\xi, \eta)$ eine Form $(m - n)^{\text{ten}}$ Grades und, wenn wir mit Binomialkoeffizienten schreiben, mit Koeffizienten $r_i(p)$ ist. Da $\bar{B}'(\xi, \eta)$ vom n^{ten} Grade in u, v ist, so sind $r_i(p)$ lineare Formen der p_i und hängen von u, v nicht ab. Es sei allgemein das konstante Glied von $r_i(p)$ durch e_i bezeichnet. Wir bilden nun die Form

$$T(\xi,\eta)=c_0\xi^{m-n}+\binom{m-n}{1}c_1\xi^{m-n-1}\eta+\cdots+c_{m-n}\eta^{m-n}.$$

Die Resultante von $A(\xi,\eta)$ und $B(\xi,\eta)$ ist nun bekanntlich gleich der Resultante von $A(\xi,\eta)$ und $B(\xi,\eta)-T(\xi,\eta)A(\xi,\eta)$. Es sei die entsprechende Substitution der a_i, b_i durch $\bar S$ bezeichnet. Auch $S\bar S$ führt die Resultante in sich über, dabei gelten auch für $S\bar S$ ganz analoge Gleichungen wie (35), da $\bar S$ $A(\xi,\eta)$ unverändert läßt, die Linearformen $r_i(p)$ sind aber für $S\bar S$ *homogen*. Wir können daher annehmen, daß bereits für S die konstanten Glieder der $r_i(p)$ gleich 0 sind. Jetzt ist aber der Ausdruck rechter Hand in (35) homogen in den p_i, dasselbe gilt also auch von $\bar B'(\xi,\eta)$, dies bedeutet aber, daß alle $\mathfrak{B}_i(u,v)$, daher auch alle $\mathfrak{B}_i(a)$, gleich 0 sind.

Damit zerfällt also S in zwei getrennte Substitutionen der Koeffizienten von $A(\xi,\eta)$ bzw. von $B(\xi,\eta)$. Daher ist unser erster Satz über die Resultante anwendbar und aus den Formeln (33) folgt, daß

$$b_i'=s_{n+i+1}(a,b)=db_i \qquad (i=0,\cdots,m)$$

ist. Damit ist der Fall $n>1$ vollständig erledigt.

8. *Der Fall* $m>n=1$. Es sei nun $m>n=1$. Dann ist $\mathsf{P}(a_i,b_i)=B(-a_1,a_0)$. Die Resultante von $A'(\xi,\eta)$, $B'(\xi,\eta)$ ist aber

$$B'(-\mathsf{A}_1(a)-\mathfrak{A}_1(b),\ \mathsf{A}_0(a)+\mathfrak{A}_0(b)) \tag{36}$$
$$=\bar B(-\mathsf{A}_1(a)-\mathfrak{A}_1(b),\ \mathsf{A}_0(a)+\mathfrak{A}_0(b))+L(-\mathsf{A}_1(a)-\mathfrak{A}_1(b),\ \mathsf{A}_0(a)+\mathfrak{A}_0(b)),$$

wo $\quad \bar B(\xi,\eta)=\sum\binom{m}{i}\mathsf{B}_i(b)\xi^{m-i}\eta^i,\quad L(\xi,\eta)=\sum\binom{m}{i}\mathfrak{B}_i(a)\xi^{m-i}\eta^i$

ist. Wir setzen außerdem

$$A'(\xi,\eta)=\bar A(\xi,\eta)+M(\xi,\eta),\quad \bar A(\xi,\eta)=\mathsf{A}_0(a)\xi+\mathsf{A}_1(a)\eta,$$
$$M(\xi,\eta)=\mathfrak{A}_0(b)\xi+\mathfrak{A}_1(b)\eta.$$

Wir zeigen zunächst, daß $\bar A(\xi,\eta)$ weder identisch verschwinden, noch in zwei Faktoren zerfallen kann, deren einer nur von den a_i, der andere nur von ξ,η abhängig wäre. Denn in beiden Fällen müßte eine Relation bestehen von der Form

$$c_0\mathsf{A}_0(a)=c_1\mathsf{A}_1(a), \tag{37}$$

wo wenigstens eine von den Zahlen c_0, c_1 von 0 verschieden wäre. Nun ist $\mathsf{P}(a_i,b_i)$ bis auf einen von 0 verschiedenen konstanten Faktor gleich demjenigen Teil von (36), der in bezug auf b_i linear homogen, in bezug auf a_i homogen vom m^{ten} Grade ist. Dieser Teil würde aber, wie man sofort einsieht, entweder verschwinden oder durch einen von den beiden Ausdrücken $\mathsf{A}_0(a)$, $\mathsf{A}_1(a)$ teilbar sein, was der Irreduzibilität von $\mathsf{P}(a_i,b_i)$ widerspricht.

Da $\mathsf{P}(a_i, b_i) = B(-a_1, a_0)$ bis auf eine Konstante gleich (36) sein soll, so folgt durch Vergleichung der Grade in bezug auf b_i, a_i

$$(38)\qquad \bar{B}(-\mathfrak{A}_1(b), \mathfrak{A}_0(b)) = 0, \quad L(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a)) = 0.$$

Da nach der zweiten der obigen Relationen $L(\xi, \eta)$ eine gemeinsame Wurzel mit $\bar{A}(\xi, \eta)$ hat, so folgt aus der Irreduzibilität von $\bar{A}(\xi, \eta)$ die Gleichung:

$$(39)\qquad L(\xi, \eta) = \bar{A}(\xi, \eta) L(\xi, \eta),$$

wo $L(\xi, \eta)$ eine Form $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades mit Zahlenkoeffizienten ist.

Hieraus folgt weiter, daß sich alle $\mathfrak{B}_i(a)$ linear homogen aus $\mathsf{A}_0(a)$, $\mathsf{A}_1(a)$ zusammensetzen. — Wir wollen nun zeigen, daß $M(\xi, \eta) = 0$, d. h. $\mathfrak{A}_0(b) = 0$, $\mathfrak{A}_1(b) = 0$ ist. Zuerst zeigen wir, daß $\mathfrak{A}_0(b)$, $\mathfrak{A}_1(b)$ nicht linear unabhängig sein können. Denn wären $\mathfrak{A}_0(b)$, $\mathfrak{A}_1(b)$ linear unabhängig, so würde $M(\xi, \eta)$ irreduzibel in b_i, ξ, η sein. Da aber nach der ersten der Gleichungen (38) $\bar{B}(\xi, \eta)$ mit $M(\xi, \eta)$ eine gemeinsame Wurzel hat, so würde die Gleichung bestehen:

$$B(\xi, \eta) = M(\xi, \eta)\Gamma(\xi, \eta),$$

wo Γ eine Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit Zahlenkoeffizienten ist. Aus ihr folgt aber, daß alle $\mathsf{B}_i(b)$ sich linear homogen aus $\mathfrak{A}_0(b)$, $\mathfrak{A}_1(b)$ zusammensetzen. Daher würden sich alle Formen $s_i(a, b)$ linear homogen aus $\mathsf{A}_0(a)$, $\mathsf{A}_1(a)$, $\mathfrak{A}_0(b)$, $\mathfrak{A}_1(b)$ zusammensetzen, die Anzahl der Formen $s_i(a, b)$ ist aber größer als 4, daher wäre S nicht umkehrbar.

Nehmen wir nun an, daß einer von den Ausdrücken $\mathfrak{A}_i(b)$, etwa $\mathfrak{A}_0(b)$, nicht identisch verschwindet, und daß daher $\mathfrak{A}_1(b) = c\mathfrak{A}_0(b)$ ist, wo c eine Zahl ist. Betrachten wir nun das Aggregat derjenigen Glieder von (36), die in b_i homogen vom 2. Grade sind. Dieses Aggregat muß identisch verschwinden. Sein von $L(-\mathsf{A}_1(a) - \mathfrak{A}_1(b), \mathsf{A}_0(a) + \mathfrak{A}_0(b))$ herrührender Teil ist aber durch $\mathfrak{A}_0^2(b)$ teilbar. Dasselbe muß auch für den von $\bar{B}(-\mathsf{A}_1(a) - \mathfrak{A}_1(b), \mathsf{A}_0(a) + \mathfrak{A}_0(b))$ herrührenden Teil stattfinden. Dieser Teil lautet: $\left(\mathfrak{A}_1(b)\frac{\partial}{\partial(\mathsf{A}_1(a))} + \mathfrak{A}_0(b)\frac{\partial}{\partial(\mathsf{A}_0(a))}\right)\bar{B}(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a))$.

Wir erhalten daher

$$\left(c\frac{\partial}{\partial \mathsf{A}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathsf{A}_0}\right)\bar{B}(-\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_0) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}_0} \qquad \text{oder}$$

$$\binom{m}{1}(-\mathsf{A}_1)^{m-1}(\mathsf{B}_1(b) - c\mathsf{B}_0(b)) + 2\binom{m}{2}(-\mathsf{A}_1)^{m-2}\mathsf{A}_0(\mathsf{B}_2(b) - c\mathsf{B}_1(b)) + \cdots \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}_0}$$

$$\mathsf{B}_1(b) - c\mathsf{B}_0(b) \equiv 0, \quad \mathsf{B}_2(b) - c\mathsf{B}_1(b) \equiv 0, \cdots \pmod{\mathfrak{A}_0(b)}.$$

Hieraus folgt, daß alle $\mathsf{B}_i(b)$ sich linear aus $\mathfrak{A}_0(b)$ und $\mathsf{B}_0(b)$ zusammensetzen lassen, daher würden alle $s_i(a, b)$ wieder lineare Kombinationen von 4 Ausdrücken $\mathsf{A}_0(a)$, $\mathsf{A}_1(a)$, $\mathfrak{A}_0(b)$, $\mathsf{B}_0(b)$ sein, was der Umkehrbarkeit von S widerspricht. Daher muß $\mathfrak{A}_0(b) = 0$ sein, und ebenso $\mathfrak{A}_1(b)$. Wir können also jetzt $M(\xi, \eta) = 0$ annehmen.

Aus (36) und (39) erhalten wir jetzt (unter d eine von 0 verschiedene Konstante verstanden):

$$d\mathsf{P}(a_i, b_i) = dB(-a_1, a_0) = \bar{B}(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a)) + L(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a))\bar{A}(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a)),$$

oder, da $\bar{A}(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a)) = 0$ ist,

$$dB(-a_1, a_0) = \bar{B}(-\mathsf{A}_1(a), \mathsf{A}_0(a)).$$

Da aber a_1, a_0 Unbestimmte sind, können wir sie durch $-\xi, \eta$ ersetzen. Dann folgt

$$dB(\xi, \eta) = \bar{B}(\alpha_{11}\xi - \alpha_{10}\eta, -\alpha_{01}\xi + \alpha_{00}\eta). \tag{40}$$

Setzen wir

$$\delta\xi' = \alpha_{11}\xi - \alpha_{10}\eta, \quad \delta\eta' = -\alpha_{01}\xi + \alpha_{00}\eta, \quad \delta = \alpha_{11}\alpha_{00} - \alpha_{10}\alpha_{01}, \tag{41}$$
$$\xi = \alpha_{00}\xi' + \alpha_{10}\eta', \quad \eta = \alpha_{01}\xi' + \alpha_{11}\eta',$$

so entsteht $\bar{A}(\xi', \eta')$ aus $A(\xi, \eta)$ durch die Substitution (41), daher ist $\delta \neq 0$. Ebenso entsteht $\bar{B}(\xi', \eta')$ aus $B(\xi, \eta)$ bis auf eine multiplikative Konstante, wie (40) zeigt. Andererseits ist nach (39) $L(\xi', \eta')$ durch $\bar{A}(\xi', \eta')$ teilbar, womit unser Satz auch im Falle $m > n = 1$ bewiesen ist.

9. *Resultante zweier Linearformen.* Es bleibt nur noch der Fall zu erledigen, daß $m = n = 1$ ist. In diesem Fall ist $\mathsf{P}(a_i, b_i) = a_0 b_1 - a_1 b_0$ die Determinante der bilinearen Form

$$L(x, y) = a_0 x_0 y_0 + a_1 x_0 y_1 + b_0 x_1 y_0 + b_1 x_1 y_1$$

und durch S wird jeder Form $L(x, y)$ eine neue Form $L'(x', y')$ zugeordnet

$$L'(x', y') = a_0' x_0' y_0' + a_1' x_0' y_1' + b_0' x_1' y_0' + b_1' x_1' y_1'.$$

Zerfällt $L(x, y)$ in ein Produkt von zwei Linearformen, so gilt dasselbe von $L'(x', y')$, da $\mathsf{P}(a_i, b_i)$ gegenüber S invariant ist. Wir setzen nun

$$\bar{L}(x, y) = (u_0 x_0 + u_1 x_1)(v_0 y_0 + v_1 y_1).$$

Die entsprechende Form $\bar{L}'(x', y')$ sei

$$\bar{L}'(x', y') = s_0(u, v) x_0' y_0' + s_1(u, v) x_0' y_1' + s_2(u, v) x_1' y_0' + s_3(u, v) x_1' y_1'.$$

Da S umkehrbar ist, so kann $s_0(u, v)$ nicht identisch verschwinden, da sonst auch $s_0(a, b)$ identisch verschwinden müßte. Daher folgt aus $s_0(u, v)\, s_3(u, v) - s_1(u, v)\, s_2(u, v) = 0$

$$(42) \qquad \bar{L}'(x', y') = s_0(u, v)\left(x_0' + \frac{s_2(u, v)}{s_0(u, v)} x_1'\right)\left(y_0' + \frac{s_1(u, v)}{s_0(u, v)} y_1'\right).$$

Da aber $\bar{L}'(x', y')$ ganz in u, v, x, y ist, so folgt aus (42) eine Darstellung

$$\bar{L}'(x', y') = K(u, v, x')\, K'(u, v, y'),$$

wo K, K' *ganze* Polynome in ihren Argumenten sind, linear in x' bzw. y', und $K'(u, v, y')$ als irreduzibel in u, v, y' angenommen werden kann. Hängt nun $K(u, v, x')$ von den u, v nicht ab, so setzen sich alle $s_i(u, v)$ linear aus den beiden Koeffizienten der y in K' zusammen, dann würde zwischen den $s_i(a, b)$ eine lineare Relation bestehen, während S umkehrbar ist. Daher hängt $K(u, v, x)$ von den u, v ab, und dasselbe gilt für $K'(u, v, y')$. Da aber $\bar{L}'(x', y')$ in u, v homogen quadratisch ist, so sind nur zwei Fälle möglich: 1. $K(u, v, x')$ hängt nur von den u, $K'(u, v, y')$ nur von den v ab:

$$K(u, v, x') = k_{00} u_0 x_0' + k_{01} u_0 x_1' + k_{10} u_1 x_0' + k_{11} u_1 x_1',$$
$$K'(u, v, y') = k_{00}' v_0 y_0' + k_{01}' v_0 y_1' + k_{10}' v_1 y_0' + k_{11}' v_1 y_1'.$$

$\bar{L}'(x', y')$ entsteht daher aus $\bar{L}(x, y)$, indem man

$$(43) \qquad \begin{gathered} x_0 = k_{00} x_0' + k_{01} x_1', \quad x_1 = k_{10} x_0' + k_{00} x_1', \quad y_0 = k_{00}' y_0' + k_{01}' y_1', \\ y_1 = k_{10}' y_0' + k_{11}' y_1' \end{gathered}$$

setzt. Damit sind die Koeffizienten der Formen $s_i(u, v)$ eindeutig bestimmt, da die Koeffizienten von $\bar{L}(x, y)$ linear unabhängig sind. Dieselben Koeffizienten haben also auch die Formen $s_i(a, b)$, daher entsteht allgemein $L'(x', y')$ aus $L(x, y)$ durch die Substitution (43). Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & a_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{00} & k_{10} \\ k_{01} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00}' & k_{01}' \\ k_{10}' & k_{11}' \end{pmatrix}.$$

2. $K(u, v, x')$ hängt nur von den v, $K'(u, v, y')$ nur von den u ab. Vertauscht man x und y, so geht dieser Fall in den Fall 1. über. Dieser Vertauschung entspricht aber der Übergang von der Matrix $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}$ zu der transponierten $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$. Daher erhalten wir in diesem Fall die entsprechende Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & b_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{00} & k_{10} \\ k_{01} & k_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00}' & k_{01}' \\ k_{10}' & k_{11}' \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen müssen die Determinanten $\begin{vmatrix} k_{00} & k_{10} \\ k_{01} & k_{11} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} k_{00}' & k_{01}' \\ k_{10}' & k_{11}' \end{vmatrix}$ von 0 verschieden sein, da sonst $\mathrm{P}(a_i', b_i') = \begin{vmatrix} a_0' & a_1' \\ b_0' & b_1' \end{vmatrix}$ identisch verschwinden würde. Damit ist auch der Fall $m = n = 1$ erledigt und unser Satz über die Resultante in allen Teilen bewiesen.

Die von uns im Falle $m = n = 1$ angewandte Beweismethode kann

auch zum Beweis des ganz analogen Satzes von S. Kantor und G. Frobenius*) über die allgemeinste Substitution S, die die allgemeine Determinante n^{ten} Grades $|a_{ik}|$ in sich bis auf einen von 0 verschiedenen konstanten Faktor überführt, verwandt werden. Man hat hier nur zu zeigen, daß S, wenn dies eine umkehrbare Substitution ist, jeder Matrix vom Range 1 wieder eine Matrix vom Range 1 zuordnet, oder allgemeiner, jeder Matrix vom Range ν eine Matrix von demselben Rang ν. Man kann dies sehr leicht mit Hilfe der Polaren von $|a_{ik}|$ zeigen, indem man beweist, daß eine Matrix (a_{ik}) dann und nur dann vom Range ν ist, wenn die $(n-\nu-1)^{\text{te}}$ Polare von $|a_{ik}|$ identisch in den Unbestimmten x_{ik} verschwindet, während die $(n-\nu)^{\text{te}}$ Polare nicht identisch verschwindet.

Dieselbe Methode führt auch zu einem neuen Beweis für den Satz von G. Frobenius**) über die allgemeinste lineare Substitution, die die allgemeine symmetrische Determinante S in sich überführt, nach dem die allgemeinste derartige Substitution entsteht, wenn man die Matrix von S vorn mit P und hinten mit P' multipliziert, wo P eine beliebige Matrix desselben Grades von nicht verschwindender Determinante, P' die transponierte Matrix von P ist. Denn auch für allgemeine symmetrische Determinanten n^{ten} Grades $|a_{ik}|$ läßt sich der Satz ohne Schwierigkeit beweisen, daß ihr Rang für ein spezielles Wertsystem ihrer Elemente dann und nur dann ν ist, wenn für dieses Wertsystem ihre $(n-\nu-1)^{\text{te}}$ Polare identisch in den $\frac{n^2+n}{2}$ Unbestimmten x_{ik} verschwindet, während ihre $(n-\nu)^{\text{te}}$ Polare nicht identisch verschwindet. Die weiteren Schlüsse lassen sich auch für quadratische Formen ganz analog wie für bilineare Formen durchführen.***)

10. *Lineare Substitutionen mit verschwindender Determinante.* In allen vorhergehenden Untersuchungen haben wir an der Voraussetzung

*) S. Kantor, Sitzungsber. der Akad. München, 1897, S. 370, sowie Monatshefte für Math. und Physik, 1900, S. 195, 220. G. Frobenius, Berl. Sitzungsber., 1897, S. 1011. Der Satz ist später wiederholt behandelt worden, s. z. B. C. Stéphanos, Journal de mathématiques p. et a., 1900 (5) 6, S. 121—128, E. Steinitz, Sitzungsber. der Berl. Math. Gesellschaft, 1903, S. 47—52. Unser Beweis hängt mit dem Beweis von C. Stéphanos sehr enge zusammen.

**) G. Frobenius, Berl. Sitzungsber. 1897, S. 1014.

***) Es sei noch bemerkt, daß derselbe Ansatz auch zum Ziele führt, wenn man nach der allgemeinsten linearen Substitution fragt, welche die *allgemeine schiefsymmetrische Determinante*, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das *allgemeine Pfaffsche Aggregat*, invariant läßt, wenn dabei auch umständlichere Überlegungen anzustellen sind.

festgehalten, daß die in Betracht gezogenen Substitutionen umkehrbar sind. Von dieser Voraussetzung können wir uns jetzt leicht befreien.

Es gehe ein Polynom $\Phi(a_i)$ gewisser Variabeln a_i durch eine lineare Substitution mit konstanten Koeffizienten und verschwindender Determinante

$$a_i = s_i(a_k')$$

in sich über. Und es lasse sich etwa $s_0(a_k')$ linear aus $s_1(a_k'), \ldots$ linear zusammensetzen. Aus der Gleichung

$$\Phi(a_k') = c\Phi(s_i(a_k')) = \Psi(s_1(a_k'), \ldots) \tag{44}$$

folgt, daß Φ dann durch eine lineare Substitution aus einem Polynom erhalten werden kann, welches von wenigen Variabeln abhängt. Differenzieren wir nun (44) nach den a_k', so setzen sich die partiellen Ableitungen von Φ aus den partiellen Ableitungen von Ψ nach $s_1, s_2, \ldots$ linear mit konstanten Koeffizienten zusammen. Daher gibt es dann nicht sämtlich verschwindende Zahlen $c_1, c_2, \ldots$, so daß identisch in a_k' die Relation

$$c_0 \frac{\partial \Phi(a_k')}{\partial a_0'} + c_1 \frac{\partial \Phi(a_k')}{\partial a_1'} + \cdots = 0 \tag{45}$$

besteht.

Ist nun $\Phi(a_i)$ die Diskriminante der binären Form (1) n^{ten} Grades $A(\xi, \eta)$, so kann die linke Seite von (45) als die $(2n-3)^{\text{te}}$ Polare der Diskriminante der Form

$$c_0 \xi^n + \cdots \tag{46}$$

aufgefaßt werden, wo die Unbestimmten nicht mit x_i, sondern mit a_i' bezeichnet werden. Nun ist aber $2n - 3 \geqq n - 1$ für $n \geqq 2$. Daher können wir nach dem am Schlusse der Nr. 2 Bemerkten auf das identische Verschwinden von (46) und daher aller c_i schließen.

Es sei jetzt Φ die Resultante $\mathrm{P}(a_i, b_i)$ der binären Formen $A(\xi, \eta)$ und $B(\xi, \eta)$. Besteht für $\mathrm{P}(a_i, b_i)$ identisch in a_i, b_i die Relation

$$\begin{aligned} c_0 \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial a_0} + \cdots + c_n \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial a_n} \\ + d_0 \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial b_0} + \cdots + d_m \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial b_m} = 0, \end{aligned}$$

wo $c_0, \ldots, c_n, d_0, \ldots, d_m$ Zahlen sind, so bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} c_0 \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial a_0} + \cdots + c_n \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial a_n} = 0 \\ d_0 \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial b_0} + \cdots + d_m \frac{\partial \mathrm{P}(a_i, b_i)}{\partial b_m} = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Verschwinden nun nicht alle c_i, und setzen wir in (47) allgemein $a_i = c_i$, so entsteht bis auf einen von 0 verschiedenen Faktor die Resultante von $B(\xi, \eta)$ und

$$c_0 \xi^n + \cdots + c_n \eta^n. \tag{48}$$

Setzen wir aber für die b_i solche Werte, daß $B(\xi, \eta)$ keine Wurzel mit (48) gemeinsam hat, so kann diese Resultante nicht verschwinden. Daher müssen alle c_i gleich 0 sein. Und ebenso folgt, daß alle $d_i = 0$ sind.

Auch für die allgemeine Determinante n^{ten} Grades und für die allgemeine symmetrische Determinante n^{ten} Grades*) kann ganz analog mit Hilfe der oben angegebenen Sätze über das Verschwinden ihrer Polaren geschlossen werden.

Göttingen, den 11. Dezember 1918.

Zusatz.

Nachdem die Korrektur meiner Abhandlung bereits abgeschlossen war, bin ich auf die Arbeit des Herrn G. Kowalewski: *Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes*, Sächs. Ber., 54 (1902), aufmerksam geworden, in der Herr Kowalewski sämtliche projektive kontinuierliche Gruppen in $n+1$ Variabeln aufstellt, die die zur Form $A(\xi, \eta)$ gehörende induzierte Gruppe enthalten. Es ergibt sich dabei das Resultat, daß die größte projektive *kontinuierliche* Gruppe, die eine Invariante $A(\xi, \eta)$ in sich überführt, stets die induzierte Gruppe selbst ist, es sei denn, daß n gerade und die Invariante eine Potenz der quadratischen Invariante ist. — In diesem schönen Satz ist aber der im Obigen bewiesene Satz über die Diskriminante von $A(\xi, \eta)$ noch nicht enthalten, da die zur Diskriminante gehörende größte Gruppe nicht notwendig eine *kontinuierliche*, sondern auch eine *gemischte* Gruppe sein könnte.

Göttingen, den 17. April 1919.

*) G. Frobenius a. a. O., wo die beiden Tatsachen direkt bewiesen werden.

Über die Wurzeln der Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Es bezeichne $\zeta(s)$ die **Riemann**sche Zetafunktion, $\zeta_\varkappa(s)$ einstweilen die Zetafunktion des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\varkappa = P(\sqrt{-k})$ der Grundzahl $-k$, $h = h(k)$ die Klassenzahl dieses Körpers, $\chi(n)$ den Charakter $\left(\frac{-k}{n}\right)$ mod. k, $L(s)$ die für $\sigma > 0$ durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ definierte ganze Funktion. Bekanntlich ist $\zeta_\varkappa(s) = \zeta(s)\,L(s)$ und für $k > 4$

(1) $$h = \frac{\sqrt{k}}{\pi} L(1).$$

Aus (1) folgt unmittelbar*), wenn a_1 (desgl. in der Folge $a_2, a_3, \cdots$) eine positive absolute Konstante bezeichnet,

$$h < a_1 \sqrt{k} \log k.$$

Herr **Gronwall****) hat zuerst bewiesen: Falls in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$

(2) $$\zeta_\varkappa(s) \neq 0$$

ist oder auch nur für reelle $s \geqq 1 - \frac{\vartheta}{\log k}$, wo $\vartheta > 0$ von k frei ist, (2) gilt, so ist

(3) $$h > b_1 \frac{\sqrt{k}}{\log k \sqrt{\log \log k}},$$

---

*) Vgl. z. B. S. 74 meiner Arbeit *Über das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche komplexen Charakteren entsprechen* [Mathematische Annalen, Bd. LXX (1911), S. 69—78].

) *Sur les séries de* ***Dirichlet* *correspondant à des caractères complexes* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 145—159]. Vgl. hierzu Anm. 2 meiner Arbeit *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 285—295].

wo b_1 (desgl. in der Folge $b_2, b_3, \cdots$) eine positive, nur von ϑ abhängige Zahl ist. Herr Hecke*) hat unter jener Annahme sogar

$$h > b_2 \frac{\sqrt{k}}{\log k} \tag{4}$$

bewiesen.

Das erste Ziel meiner heutigen Arbeit ist der in beiden Teilen (Abschätzung nach unten und oben) neue

Satz I: *Wenn* (2) *für* $\sigma > \frac{1}{2}$ *oder auch nur für* $|s-1| \leqq \vartheta$, *wo* $\vartheta > 0$ *und von* k *frei ist, gilt, so ist für***) $k > e^e$

$$b_3 \frac{\sqrt{k}}{\log\log k \cdot \log\log\log k} < h < b_4 \sqrt{k} \log\log k \cdot \log\log\log k. \tag{5}$$

Beim Beweise in § 1 werde ich benutzen: 1. Meinen zuerst in der oben (S. 388, Anm. *)) zitierten Arbeit aus diesen Annalen eingeführten Gedanken***), daß $L(s)$ im Punkte 1 als Funktion von k mit ähnlichen Mitteln behandelt werden kann wie $\zeta(1+ti)$ als Funktion von t in meinen früheren Arbeiten; 2. Herrn Littlewoods†) Paradigma: Wenn $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1 - \vartheta$ $(\vartheta > 0)$ ist, so ist für $t \geqq [e^e] + 1$

$$\frac{b_5}{\log\log t \cdot \log\log\log t} < |\zeta(1+ti)| < b_6 \log\log t \cdot \log\log\log t.$$

Eine wichtige Rolle beim Beweise spielen die Carathéodorysche Ungleichung ((10) nachher) und der Hadamardsche Dreikreisesatz ((13) nachher).

Andererseits erhalte ich in § 2 mit denselben Hilfsmitteln (bei weit weniger sorgfältiger Wahl der Hilfskreise) leicht den

Satz II: *Wenn* $L(s) \neq 0$ *für* $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$ *ist, so ist*

$$h < e^{a_7 \log^{a_8} k}, \tag{6}$$

wo $a_8 < 1$ *ist.*

Die Ungleichung (6) widerspricht aber bei festem kleinen ϑ für alle hinreichend großen k der ersten Hälfte von (5); übrigens bereits z. B. den Relationen (4) und (3). Also (populär ausgedrückt): Ist $L(s) \neq 0$ in einem kleinen Kreis um 1, so ist h groß; ist $L(s) \neq 0$ in einem großen Kreis um 1, so ist h klein. Der kleine Kreis liegt aber im großen Kreis;

*) Sein Beweis steht in meiner soeben genannten Arbeit (S. 287—290).

**) e^e, damit $\log\log\log k > 0$ ist.

***) Dort ist übrigens vor allem von einem komplexen Charakter $\chi(n)$ die Rede. Auch Herr Gronwall bezieht sich auf obigen Gedanken.

†) *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan* $R(s) > \frac{1}{2}$ [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. CLIV (1912), S. 263-266].

folglich kann eben $L(s)$ im großen Kreis (für große k) nicht beständig $\neq 0$ sein. Die Voraussetzung des Satzes II ist also sicher für alle großen k falsch. Und damit entsteht der — von jedem Postulat freie —

Satz III: *Es gibt eine absolute Konstante* $a > 0$, *so daß im Rechteck* $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq a$ *mindestens eine Wurzel von* $L(s)$ *liegt.*

Anders ausgedrückt: Die absolut kleinste nicht triviale*) Wurzel von $\frac{\zeta_\varkappa}{\zeta}(s)$ ist beschränkt (für alle k).

Übrigens wird aus der beim Beweise des Satzes II vorkommenden Formel (27) auch ohne Heranziehung des Satzes I der Satz III dadurch folgen, daß (27)

$$h > \sqrt{k}\, e^{-a_1 \log^{a_2} k}$$

liefert, was für große k mit (6) in Widerspruch steht; noch einfacher dadurch, daß (27)

$$L\left(\frac{9}{8}\right) < k^{-\frac{5}{8}} e^{a_1 \log^{a_2} k}$$

liefert, während — für große k im Gegensatz hierzu —

$$\frac{1}{L\left(\frac{9}{8}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n^{\frac{9}{8}}} \leqq \zeta\left(\frac{9}{8}\right)$$

ist, also $L\left(\frac{9}{8}\right)$ eine positive untere Schranke hat.

Den Satz III (der sich mir als unerwartetes Nebenresultat auf dem zuerst angegebenen Wege ergeben hatte) werde ich in §§ 3–4 auf alle algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ irgend eines festen Grades n verallgemeinern können. Ich muß aber bei seiner Formulierung vorsichtig sein, da man nicht weiß, ob $\frac{\zeta_\varkappa}{\zeta}(s)$ stets eine ganze Funktion ist. Der Satz heißt demgemäß:

Satz IV: *Es sei* $n \geqq 2$. *Dann gibt es ein nur von* n *abhängiges* $\lambda(n) > 0$, *so daß für jeden Zahlkörper* $\varkappa$ *vom* n^{ten} *Grade mindestens eine nicht triviale***) *Wurzel von* $\zeta_\varkappa(s)$, *die nicht oder nur in geringerer Vielfachheit Wurzel von* $\zeta(s)$ *ist, dem Rechteck* $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq \lambda(n)$ *angehört.*

---

*) Die trivialen Wurzeln sind $-1, -3, -5, \cdots$, je erster Ordnung.

**) Nach Herrn Hecke (vgl. Satz 155 und 183 meiner *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1918]) gehören die von den „trivialen" Wurzeln $0, -1, -2, -3, -4, \cdots$ der Ordnungen $r, r_2, r+1, r_2, r+1, \cdots$ verschiedenen Wurzeln von $\zeta_\varkappa(s)$ dem Streifen $0 < \sigma < 1$ an und liegen symmetrisch zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$, sowie natürlich zur Geraden $t = 0$.

Damit ist dann gezeigt, daß stets die absolut kleinste nicht triviale Wurzel von $\zeta_x(s)$ und, wenn $\frac{\zeta_x}{\zeta}(s)$ ganz ist, sogar die absolut kleinste nicht triviale Wurzel dieser Funktion bei festem n beschränkt ist.

§ 1. Beweis des Satzes I.

Da es nicht mehr Mühe macht, werde ich an Stelle des Satzes I die (wegen (1)) allgemeinere Behauptung beweisen:

Es gibt zwei nur von $\vartheta > 0$ abhängige Zahlen b_7 und b_8 mit folgender Eigenschaft. Es sei k irgendeine ganze Zahl $> e^e$ und $\chi(n)$ irgendein eigentlicher Charakter mod. k*). *Die für $\sigma > 0$ durch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ definierte ganze Funktion $L(s)$ sei $\neq 0$ für $|s-1| \leqq \vartheta$. Dann ist*

$$\frac{b_7}{\log\log k\cdot\log\log\log k} < |L(1)| < b_8 \log\log k\cdot\log\log\log k. \tag{7}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\vartheta < 1$.

Ich setze

$$\sum_{n \leqq u}\chi(n) = S(u).$$

Für $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{5}{2}$, $|t| \leqq 3$ ist nach hier ausreichender, roher Abschätzung**)

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)-S(n-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}S(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}S(n)s\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{s+1}} = s\int_1^{\infty}\frac{S(u)\,du}{u^{s+1}},$$

$$|L(s)| \leqq \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+3^2}\int_1^{\infty}\frac{k\,du}{u^{\frac{3}{2}}} = a_8 k. \tag{8}$$

Nach Voraussetzung ist $L(s) \neq 0$ für $\left|s-\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right| \leqq \vartheta$, weil dieser Kreis teils dem Kreise $|s-1| \leqq \vartheta$, teils der Halbebene $\sigma > 1$ angehört. Die für $\sigma > 1$ durch

$$F(s) = \log L(s) = \sum_{p,m}\frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}}$$

---

*) Es gibt mindestens einen solchen, wenn $k \not\equiv 2$ (mod. 4) ist.

**) Dieser Beweis von (8) gilt, was in § 2 benutzt wird, noch für alle $k > 1$.

definierte Funktion ist also für $\left|s-\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right| \leqq \vartheta$ regulär; ebenda ist, da dieser Kreis dem Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{5}{2}$, $|t| \leqq 3$ angehört, nach (8)

$$\Re F(s) = \log|L(s)| \leqq \log(a_6 k) < a_7 \log k. \tag{9}$$

Nun wende ich die Carathéodorysche Ungleichung*)

$$|F(s)| \leqq |\Im F(s_0)| + |\Re F(s_0)| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A\frac{\varrho}{r-\varrho} \qquad (|s-s_0| \leqq \varrho), \tag{10}$$

in der $F(s)$ für $|s-s_0| \leqq r$ regulär vorausgesetzt wird, $0 < \varrho < r$ und $A = \operatorname*{Max.}_{|s-s_0|=r} \Re F(s)$ ist, auf $s_0 = 1 + \frac{\vartheta}{2}$, $\varrho = \frac{3}{4}\vartheta$, $r = \vartheta$ an. Nach (9) ist

$$A < a_7 \log k;$$

ferner ist $$|F(s_0)| \leqq \sum_{p,m} \frac{1}{m p^{m s_0}} = \log \zeta\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right) = b_9.$$

(10) ergibt also für $\left|s-\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)\right| \leqq \frac{3}{4}\vartheta$

$$|F(s)| < b_9 + b_9 \cdot 7 + 2a_7 \log k \cdot 3 < b_{10} \log k. \tag{11}$$

Nun nehme ich k alsbald so groß an ($k > b_{11} > e^e$), daß

$$\frac{1}{\log\log k \cdot \log\log\log k} < \frac{\vartheta}{4} \tag{12}$$

ist; es genügt natürlich, (7) für $k > b_{11}$ mit passenden Konstanten b_{12} und b_{13} links und rechts zu beweisen.

Ich wende jetzt den Hadamardschen Dreikreisesatz**)

$$M_2 \leqq M_1^{\log\frac{r_3}{r_2} : \log\frac{r_3}{r_1}} M_3^{\log\frac{r_2}{r_1} : \log\frac{r_3}{r_1}} \tag{13}$$

(wo $F(s)$ für $|s-s_0| \leqq r_3$ regulär, $0 < r_1 < r_2 < r_3$, $M_\nu = \operatorname*{Max.}_{|s-s_0| \leqq r_\nu} |F(s)|$ ist) auf $s_0 = 1 + \frac{\vartheta}{2}$, $r_1 = \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{\log\log k \cdot \log\log\log k}$, $r_2 = \frac{\vartheta}{2}$, $r_3 = \frac{3}{4}\vartheta$ an; r_1 ist $> \frac{\vartheta}{4} > 0$ wegen (12).

Für $1 < s < e$ ist

$$\log\zeta(s) < \log\left(1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^s}\right) = \log\left(1+\frac{1}{s-1}\right) = \log\frac{s}{s-1} < \log\frac{e}{s-1} = \log\frac{1}{s-1} + 1;$$

mit Rücksicht auf $|F(s)| \leqq \log\zeta(\sigma)$ für $\sigma > 1$ ist daher

*) Vgl. § 73 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909].

**) Vgl. § 21 meiner *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* [Berlin (Springer), 1916].

(14) $M_1 \leqq \log \zeta\left(1 + \frac{1}{\log\log k \cdot \log\log\log k}\right) < \log\log\log k + \log\log\log\log k + 1;$

wegen $\log \frac{r_3}{r_2} : \log \frac{r_3}{r_1} < 1$ ist folglich für $k > \text{Max.}(b_{11}, e^{(e^e)}) = b_{14}$ (wodurch die rechte Seite von (14) sicher > 1 wird)

$$M_1^{\log \frac{r_3}{r_2} : \log \frac{r_3}{r_1}} < \log\log\log k + \log\log\log\log k + 1. \tag{15}$$

Andererseits ist nach (11)

$$M_3 < b_{15} \log k < \log^{b_{15}} k. \tag{16}$$

Wegen $\frac{\vartheta}{4} < r_1 < \frac{\vartheta}{2}$, $\frac{r_3}{r_1} > \frac{\frac{3}{4}\vartheta}{\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{3}{2}$, $\log \frac{r_3}{r_1} > \log \frac{3}{2} > \frac{1}{3}$ ist

$$\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1} < 3 \log \frac{r_2}{r_1} = 3 \log\left(1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1}\right) < 3\,\frac{r_2 - r_1}{r_1} < \frac{12}{\vartheta}(r_2 - r_1)$$

$$= \frac{12}{\vartheta}\,\frac{1}{\log\log k \cdot \log\log\log k}. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt $\left(\text{da } e^z < 1 + 2z \text{ für } 0 < z < \frac{1}{2} \text{ ist}\right)$

$$M_3^{\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1}} < (\log k)^{\frac{12 b_{15}}{\vartheta \log\log k \cdot \log\log\log k}} = e^{\frac{12 b_{15}}{\vartheta \log\log\log k}} < 1 + \frac{b_{16}}{\log\log\log k}. \tag{18}$$

(15) und (18) ergeben, in (13) eingesetzt,

$$M_2 < \log\log\log k + \log\log\log\log k + b_{17},$$

also, weil $s = 1$ auf dem Rande des Kreises $|s - s_0| \leqq r_2$ liegt,

$$|\log |L(1)|| = |\Re \log L(1)| \leqq |\log L(1)| = |F(1)|$$
$$< \log\log\log k + \log\log\log\log k + b_{17},$$

$$-\log\log\log k - \log\log\log\log k - b_{17} < \log |L(1)|$$
$$< \log\log\log k + \log\log\log\log k + b_{17},$$

$$\frac{b_{18}}{\log\log k \cdot \log\log\log k} < |L(1)| < b_{18} \log\log k \cdot \log\log\log k, \quad \text{q. e. d.}$$

§ 2. Beweis der Sätze II und III.

Auch hier werde ich, da es kaum mehr Mühe macht, an Stelle des Satzes II eine (wegen (1)) allgemeinere Behauptung beweisen:

Es sei $k > 1$, $\chi(n)$ *irgendein eigentlicher Charakter* mod. k. *Wenn* $L(s) \neq 0$ *für* $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$ *ist, so ist*

$$|L(1)| < \frac{1}{\sqrt{k}}\, e^{a_3 \log^{a_3} k}, \qquad \textit{wo } a_3 < 1 \textit{ ist} \tag{19}$$

Beweis: Es bedeute, wie in Kap. XXX ff. des *Handbuchs*, $\mathfrak{a}$ den Wert 0 im Falle $\chi(-1)=1$, den Wert 1 im Falle $\chi(-1)=-1$, so daß die Funktionalgleichung*) zwischen $L(s)$ und der dem konjugiert komplexen Charakter entsprechenden Funktion $L_1(s)$ lautet:

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)L(s)=\varepsilon\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)L_1(1-s),\qquad |\varepsilon|=1;$$

sie ergibt, wenn die ganze Funktion

$$\frac{L(s)}{s^{1-\mathfrak{a}}}=\Lambda(s)$$

gesetzt wird, für $\sigma<1$

$$(20)\qquad |\Lambda(s)|=\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)}{s^{1-\mathfrak{a}}\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)}\right|\,|L_1(1-s)|.$$

Nach Voraussetzung und den bekannten Eigenschaften der Wurzeln von $L(s)$ verschwindet $\Lambda(s)$ nicht für $\sigma\geqq-\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 3$.

Für $\sigma\geqq 2$ ist

$$(21)\qquad |L(s)|\leqq\zeta(2)=a_8<a_9k.$$

Für $\frac{1}{2}\leqq\sigma<2$, $|t|\leqq 3$ ist nach (8)

$$(22)\qquad |L(s)|\leqq a_6k,$$

also auch

$$(23)\qquad |L_1(s)|\leqq a_6k.$$

Für $-\frac{1}{2}\leqq\sigma<\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 3$ ist nach (20) und (23)

$$(24)\qquad |\Lambda(s)|<a_{10}k^2.$$

Aus (21), (22) und (24) folgt für $\sigma\geqq-\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 3$

$$(25)\qquad |\Lambda(s)|<a_{11}k^2.$$

Ich verstehe nun unter $F(s)$ die für $s>1$ durch

$$F(s)=\log\Lambda(s)=\log L(s)-(1-\mathfrak{a})\log s=\sum_{p,m}\frac{\chi(p^m)}{m\,p^{ms}}-(1-\mathfrak{a})\log s$$

bei reellem Logarithmus definierte Funktion. Nach dem obigen ist $F(s)$ für $\sigma\geqq-\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 3$ regulär; nach (25) ist dortselbst

$$\Re F(s)=\log|\Lambda(s)|<\log a_{11}+2\log k<a_{12}\log k.$$

*) S. 497.

Nach der Carathéodoryschen Ungleichung (10) ist also, $s_0 = 2, \varrho = \frac{9}{4}$, $r = \frac{5}{2}$ eingesetzt, für $|s-2| \leqq \frac{9}{4}$

$$|F(s)| < \log\zeta(2) + (\log\zeta(2) + \log 2)\frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{4}} + 2a_{12}\log k \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{4}}$$

$$< a_{13}\log k. \tag{26}$$

Nach dem Hadamardschen Dreikreisesatz (13), auf $s_0 = 2$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{17}{8}$, $r_3 = \frac{9}{4}$ angewendet, ist daher, wegen

$$M_1 \leqq \log\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \underset{|s-2| \leqq \frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}} |\log s| = a_{14}$$

und (infolge von (26)) $\qquad M_3 < a_{13}\log k$,

$$M_2 < a_{15}\log^{a_3} k, \tag{27}$$

wo $a_3 = \log\frac{17}{4} : \log\frac{9}{2} < 1$ ist.

Von (27) kann es nun gemäß den Andeutungen der Einleitung wegen

$$\log|\Lambda(s)| = \Re\log\Lambda(s)\begin{cases}\leqq |\log\Lambda(s)| = |F(s)| \\ \geqq -|\log\Lambda(s)| = -|F(s)|\end{cases} \tag{28}$$

auf drei verschiedene Arten über Satz II zu Satz III bzw. direkt zum Satze III weitergehen; übrigens (allgemeiner als in der Einleitung angekündigt) für beliebige eigentliche Charaktere nach dem Modul $k > 1$.

1. Weil $s = 0$ dem Kreis $|s-2| \leqq \frac{17}{8}$ angehört, ist

$$\log|\Lambda(0)| \leqq |F(0)| \leqq M_2 < a_{15}\log^{a_3} k,$$

also, wenn $s = 0$ in (20) eingesetzt wird,

$$|L(1)| = |L_1(1)| < \frac{a_{16}}{\sqrt{k}}|\Lambda(0)| < \frac{a_{16}}{\sqrt{k}} e^{a_{15}\log^{a_3} k} < \frac{1}{\sqrt{k}} e^{a_4 \log^{a_3} k},$$

womit (19), d. h. Satz II bewiesen ist, also in Verbindung mit Satz I der Satz III.

2. Statt Satz I heranzuziehen, schließe ich aus (27) und (28), weil $s = 1$ dem Kreis $|s-2| \leqq \frac{17}{8}$ angehört,

$$\log|L(1)| = \log|\Lambda(1)| \geqq -|F(1)| \geqq -M_2 > -a_{15}\log^{a_3} k,$$

$$|L(1)| > e^{-a_{15}\log^{a_3} k},$$

was für große k der Ungleichung (19) des Satzes II widerspricht. Das liefert Satz III.

3. Weil $s = -\frac{1}{8}$ dem Kreis $|s-2| \leqq \frac{17}{8}$ angehört, ist nach (27) und (28)

$$\log\left|\Lambda\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right| \leqq \left|F\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right| \leqq M_2 < a_{15}\log^{a_5} k, \qquad \left|\Lambda\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right| < e^{a_{15}\log^{a_5} k};$$

andererseits ist nach (20), $s = -\frac{1}{8}$ eingesetzt,

$$\left|L\left(\tfrac{9}{8}\right)\right| = \left|L_1\left(\tfrac{9}{8}\right)\right| < a_{17}k^{-\frac{5}{8}}\left|\Lambda\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right| < a_{17}k^{-\frac{5}{8}}e^{a_{15}\log^{a_5} k} < k^{-\frac{5}{8}}e^{a_5\log^{a_5} k},$$

was für große k mit der Beschränktheit von

$$\left|\frac{1}{L\left(\frac{9}{8}\right)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{\frac{9}{8}}}\right| \leqq \zeta\left(\tfrac{9}{8}\right)$$

unverträglich ist. Das liefert direkt Satz III.

Da ich für alle eigentlichen Charaktere nach dem Modul $k > 1$ gezeigt habe, daß das Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq a$ mindestens eine Wurzel des zugehörigen $L(s)$ enthält, so ist auf Grund von S. 483, Z. 2 des *Handbuchs* die Behauptung des Satzes III für alle (eigentlichen oder uneigentlichen) Charaktere nach jedem Modul $k \geqq 1$ bewiesen:

Die absolut kleinste nicht triviale) Wurzel von $L(s)$ ist beschränkt.*

§ 3. Hilfssatz zum Beweis des Satzes IV.

Hilfssatz: *$\zeta_\kappa(s)$ sei die Zetafunktion irgendeines (nicht festen!) Zahlkörpers des festen Grades $n \geqq 2$, Δ die Grundzahl des Körpers, $|\Delta| = D$, also nach Minkowski**) $D \geqq 2$; ich setze, wenn r die in meiner Einführung übliche Bedeutung $r_1 + r_2 - 1$ hat,*

$$\Lambda(s) = \frac{(s-1)\zeta_\kappa(s)}{s^r};$$

dies $\Lambda(s)$ ist nach dem dortigen Satz 155 ganz und verschwindet weder für $s = 0$ noch für $s = 1$. Ich behaupte, daß im Rechteck $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$, $|t| \leqq 3$

$$|\Lambda(s)| < D^{\lambda_1}$$

---

*) Als triviale Wurzeln haben die Wurzeln des Faktors $\frac{1}{s^b}\prod_{\nu=1}^{c}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}$ in der Formel (9) auf S. 510 des *Handbuchs* zu gelten. Die nicht trivialen Wurzeln sind die im Streifen $0 < \sigma < 1$.

**) Vgl. z. B. S. 341 in Herrn Bachmanns *Allgemeiner Arithmetik der Zahlenkörper* [Leipzig (Teubner), 1905].

ist, wo λ_1 (desgl. λ_2, λ_3, ... nachher) eine nur von n abhängige positive Zahl ist. (D. h. λ_1 hängt nicht von σ, t und dem Körper, insbesondere also nicht von D ab.))*

Beweis: Es bedeute, wie in § 13 der *Einführung*, A die Zahl $2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{D}$; es werde

$$\Phi(s) = A^s\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1}(\Gamma(s))^{r_2}\zeta_\varkappa(s)$$

gesetzt. Die über alle h Klassen $\mathfrak{K}$ bei irgendeiner bestimmten Wahl der Repräsentanten $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{K}^{-1}$ summierte Formel (117) lautet, wenn $\Psi_1(s)$ bzw. $\Psi_2(1-s)$ die Summe ihrer zweiten bzw. dritten Zeile über $\mathfrak{K}$ ist,

$$\Phi(s) = \frac{2\mathrm{N}h}{nw}\frac{1}{s(s-1)} + \Psi_1(s) + \Psi_2(1-s); \tag{29}$$

hierin sind, wie ein Blick auf (117) und die dort daraus gezogenen Konsequenzen lehrt, die ganzen Funktionen $\Psi_1(s)$ und $\Psi_2(s)$ für reelle s positiv, wachsen mit s und genügen für komplexes s den Ungleichungen

$$|\Psi_1(s)| \leqq \Psi_1(\sigma), \quad |\Psi_2(s)| \leqq \Psi_2(\sigma).$$

Aus (29) folgt also erstens, $s = 5$ eingesetzt,

$$\frac{1}{20}\frac{2\mathrm{N}h}{nw} < \Phi(5),$$

zweitens für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$ (da nach Definition $\frac{2\mathrm{N}h}{nw} > 0$ ist)

$$|\Psi_1(s)| \leqq \Psi_1(\sigma) \leqq \Psi_1(5) < \Phi(5),$$

drittens für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$ wegen (120)

$$|\Psi_2(1-s)| \leqq \Psi_2(1-\sigma) \leqq \Psi_2\left(\frac{3}{2}\right) \leqq \Psi_2(5) < \Phi(-4) = \Phi(5);$$

daher ist für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$, $|t| \leqq 3$ (wegen $|s(s-1)| < a_{18}$)

$$|s(s-1)\Phi(s)| = \left|\frac{2\mathrm{N}h}{nw} + s(s-1)\Psi_1(s) + s(s-1)\Psi_2(1-s)\right|$$

$$< 20\,\Phi(5) + a_{18}\Phi(5) + a_{18}\Phi(5) = a_{19}\Phi(5) < \lambda_2 D^{\frac{5}{2}}\zeta_\varkappa(5).$$

Für $s > 1$ ist nun**)

---

*) Natürlich ließe sich ebenso der entsprechende Satz für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ bei irgendwelchen festen σ_1, σ_2 beweisen. Übrigens folgt er auch leicht aus dem obigen Wortlaut; das Schwierige ist ja nur das Verhalten im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ und seiner nächsten Umgebung.

**) Vgl. meine Arbeit *Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 79—97], S. 89—90.

(30) $$\zeta_\kappa(s) \leqq (\zeta(s))^n;$$

also ist $$\zeta_\kappa(5) \leqq (\zeta(5))^n = \lambda_3.$$

Für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$, $|t| \leqq 3$ ist daher

$$|s(s-1)\Phi(s)| < \lambda_4 D^{\frac{5}{2}},$$

also, wegen $$s(s-1)\Phi(s) = A^s\left(s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1}(s\Gamma(s))^{r_2}\Lambda(s),$$

$$|\Lambda(s)| < \frac{\lambda_4 D^{\frac{5}{2}}}{\lambda_5 D^{-\frac{1}{4}}} = \lambda_6 D^{\frac{11}{4}} < D^{\lambda_7}.$$

§ 4. Beweis des Satzes IV.

Es sei $n \geqq 2$ und fest. Mein Ziel soll sein, die Existenz eines $\lambda = \lambda(n)$ nachzuweisen, so daß das Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq \lambda$ mindestens eine Wurzel von $\zeta_\kappa(s)$ enthält, die nicht oder in geringerer Vielfachheit Wurzel von $\zeta(s)$ ist.

Ich erinnere zunächst an die drei bekannten Tatsachen:

1. $\zeta(s)$ hat keine Wurzel im Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$.*)

2. Jedem D entsprechen höchstens endlich viele Körper n^{ten} Grades.**)

---

*) Einfacher Beweis nach Herrn Phragmén, *Sur le logarithme intégral et la fonction f(x) de Riemann* [Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. XLVIII (1891—1892), S. 599—616], S. 605—606: Für die rechte Seite der Formel (2) auf S. 282 des *Handbuchs*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) - \frac{1}{s(s-1)} = \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\,dx$$

gilt in obigem Rechteck, wegen der für $x \geqq 1$ gültigen Ungleichungen

$$\left|x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right| \leqq x^{\frac{\sigma}{2}-1} + x^{\frac{1-\sigma}{2}-1} \leqq 1 + 1 = 2$$

und $$\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} < \sum_{n=1}^\infty e^{-n\pi x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} \leqq \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi}} < \frac{e^{-\pi x}}{1-2^{-3}} = \frac{8}{7}e^{-\pi x},$$

$$\left|\int_1^\infty\right| < \frac{16}{7}\int_1^\infty e^{-\pi x}\,dx = \frac{16}{7\pi e^\pi} < \frac{16}{7\cdot 3\cdot 2^3} = \frac{2}{21} < \frac{1}{10},$$

während $$\left|\frac{1}{s(s-1)}\right| > \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{1}{10}$$ ist.

**) Vgl. die auf S. 396, Anm. **) zitierte Stelle.

3. Jedes $\zeta_\kappa(s)$ hat im Streifen $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$ Wurzeln, die nicht oder in geringerer Vielfachheit Wurzeln von $\zeta(s)$ sind.*)

Daher genügt es offenbar, den Satz zu beweisen:

Wenn für $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$

$$\Lambda(s) \neq 0 \tag{31}$$

ist, so ist

$$D < \lambda_7.$$

(Denn für alle $D \geqq \lambda_7$ enthält hiernach das Rechteck $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$ wegen 1. einen Punkt gewünschter Art; für die wegen 2. endlich vielen Körper mit $D < \lambda_7$ kann man wegen 3. die Schranke 3 passend vergrößern, eben zu λ.)

Beweis: Die Funktionalgleichung (120) der *Einführung* ergibt, $s = \frac{9}{8}$ eingesetzt,

$$A^{\frac{9}{8}}\left(\Gamma\left(\tfrac{9}{16}\right)\right)^{r_1}\left(\Gamma\left(\tfrac{9}{8}\right)\right)^{r_2}\zeta_\kappa\left(\tfrac{9}{8}\right) = A^{-\frac{1}{8}}\left(\Gamma\left(-\tfrac{1}{16}\right)\right)^{r_1}\left(\Gamma\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right)^{r_2}\zeta_\kappa\left(-\tfrac{1}{8}\right);$$

also

$$\zeta_\kappa\left(\tfrac{9}{8}\right) < \lambda_8 D^{-\frac{5}{8}}\left|\zeta_\kappa\left(-\tfrac{1}{8}\right)\right|. \tag{32}$$

Unter der Annahme (31) für $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$ verschwindet $\Lambda(s)$ nicht für $\sigma \geqq -\frac{1}{2}$, $|t| \leqq 3$. Ich werde nun $\left|\Lambda\left(-\frac{1}{8}\right)\right|$ und damit $\left|\zeta_\kappa\left(-\frac{1}{8}\right)\right|$ nach der Methode des § 2 nach oben abschätzen.

Für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$, $|t| \leqq 3$ ist nach dem Hilfssatz des § 3

$$|\Lambda(s)| < D^{\lambda_1},$$

also, wenn die für $s > 1$ reell definierte und für $\sigma \geqq -\frac{1}{2}$, $|t| \leqq 3$ reguläre Funktion $\log\Lambda(s) = \log\zeta_\kappa(s) + \log(s-1) - r\log s = F(s)$ gesetzt wird, $\Re F(s) = \log|\Lambda(s)| < \lambda_1 \log D$.

Weil nach (30)

$$|F(2)| \leqq \log\zeta_\kappa(2) + r\log 2 < \lambda_9$$

ist, liefert die Carathéodorysche Ungleichung für $|s-2| \leqq \frac{9}{4}$

---

*) Denn nach Satz 171 der *Einführung* ist die Anzahl der Wurzeln von $\zeta_\kappa(s)$ im Rechteck $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 < t \leqq T$, mehrfache mehrfach gezählt, $\sim \frac{n}{2\pi} T\log T$, während bei $\zeta(s)$ die entsprechende Anzahl $\sim \frac{1}{2\pi} T\log T$ ist.

$$|F(s)| < \lambda_9 + \lambda_9 \frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{4}} + 2\lambda_1 \log D \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{4}} < \lambda_{10} \log D.$$

In der Formel (13) des Hadamardschen Dreikreisesatzes mit $s_0 = 2$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{17}{8}$, $r_3 = \frac{9}{4}$ ist daher $M_3 < \lambda_{10} \log D$. Andererseits ist

$$M_1 \leqq \log \zeta_\varkappa\left(\frac{3}{2}\right) + \operatorname*{Max.}_{|s-2| \leqq \frac{1}{2}} |\log(s-1) - r \log s| < \lambda_{11}.$$

Er ergibt also $$M_2 < \lambda_{12} \log^{\lambda_{13}} D,$$
wo $\lambda_{13} < 1$ ist.

Insbesondere ist daher

$$\log \left|\Lambda\left(-\frac{1}{8}\right)\right| \leqq \left|F\left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \lambda_{12} \log^{\lambda_{13}} D,$$

$$(33) \qquad \left|\zeta_\varkappa\left(-\frac{1}{8}\right)\right| = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^r}{\frac{9}{8}} \left|\Lambda\left(-\frac{1}{8}\right)\right| < \left|\Lambda\left(-\frac{1}{8}\right)\right| < e^{\lambda_{12} \log^{\lambda_{13}} D}.$$

Aus (32) und (33) folgt

$$1 < \zeta_\varkappa\left(\frac{9}{8}\right) < \lambda_8 D^{-\frac{5}{8}} e^{\lambda_{12} \log^{\lambda_{13}} D},$$

also, da die rechte Seite bei wachsendem D wegen $\lambda_{13} < 1$ gegen 0 strebt,

$$D < \lambda_7, \qquad \text{q. e. d.}$$

Schluß.

Für die Kenner meiner Arbeit *Über Ideale und Primideale in Idealklassen* [Mathematische Zeitschrift, Bd. II (1918), S. 52—154] bemerke ich, daß die Beweismethode der vorangegangenen §§ 3—4 sogar für die absolut kleinste nicht triviale (d. h. dem Streifen $0 < \sigma < 1$ angehörige) Wurzel irgendeines $\zeta(s, \chi)$ — bei $n \geqq 2$ auch mit dem Zusatz: welche nicht oder in geringerer Vielfachheit Wurzel von $\zeta(s)$ ist — liefert: *Ihr absoluter Betrag ist für alle Körper n^{ten} Grades (wo $n \geqq 1$ und fest ist) unterhalb einer vom Körper, $\mathfrak{f}$ und χ freien (nur von n abhängigen) Schranke gelegen.* (Für $n = 1$ deckt sich dies genau mit dem Endergebnis des § 2.)

Beim Beweise ist nur folgendes zu beachten:

1. Wegen des Satzes LXII braucht die Behauptung nur für eigentliche χ bewiesen zu werden, und nach den zu Beginn des § 4 angestellten Überlegungen genügt es (da es bei festem n zu jedem Werte von $D N \mathfrak{f}$ nur endlich viele Funktionen $\zeta(s, \chi)$ gibt) zu beweisen: Wenn für $\frac{1}{2} \leqq \sigma < 1$, $|t| \leqq 3$ $\qquad \zeta(s, \chi) \neq 0$

ist, so ist
$$DN\mathfrak{f} < \lambda_{14}.$$
Ferner darf jetzt der Fall $n = 1$ und der in §§ 3—4 erledigte Fall beiseite gelassen werden, daß zugleich $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ und χ der Hauptcharakter (d. h. $\zeta(s, \chi) = \zeta_{\kappa}(s)$) ist. Dann ist $\zeta(s, \chi)$ nach Satz LXI ganz.

2. Für das Analogon zum Hilfssatz des § 3 ist hier gemäß Satz LXV
$$\Lambda(s, \chi) = \frac{\zeta(s, \chi)}{s^{r+1-q}}$$
zu setzen, beim Beweise $\Phi(s, \chi)$ gleich der durch Formel (52) meiner alten Abhandlung definierten Funktion. In dem $A(\mathfrak{f})$ hierbei tritt $DN\mathfrak{f}$ genau an der Stelle auf, wo oben D in A auftrat; und dies D war ja gerade aus dem Endergebnis herausgefallen. Daß die Γ-Faktoren in (52) anders lauten als in §§ 3—4, schadet nichts.

3. Statt (29) heißt es hier
$$\Phi(s, \chi) = \Psi_1(s, \chi) + \Psi_2(1 - s, \chi),$$
wo $\Psi_1(s, \chi)$ bzw. $\Psi_2(1 - s, \chi)$ die Summe der zweiten und dritten bzw. vierten und fünften Zeile von (41) über alle h Klassen bei irgendeiner bestimmten Wahl der $\mathfrak{a}$ ist. Der Beweis des Satzes LVII lehrt, daß für $\sigma \leqq 5$
$$|\Psi_1(s, \chi)| \leqq (A(\mathfrak{f}))^5 \left(\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right)^{r_1 - q} (\Gamma(5))^{r_2} \zeta_{\kappa}(5) < (DN\mathfrak{f})^{\lambda_{15}}$$
und ebenso
$$|\Psi_2(s, \chi)| < (DN\mathfrak{f})^{\lambda_{15}}$$
gilt. Nach dem Paradigma des § 3 folgt hieraus schließlich
$$|\Lambda(s)| < (DN\mathfrak{f})^{\lambda_{16}}$$
für $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 5$, $|t| \leqq 3$.

4. Nach Anleitung von § 4 ergibt sich nunmehr
$$\left|\zeta\left(\frac{9}{8}, \chi\right)\right| < \lambda_{17} (DN\mathfrak{f})^{-\frac{5}{8}} e^{\lambda_{18} \log^{\lambda_{19}} (DN\mathfrak{f})},$$
wo $\lambda_{19} < 1$ ist; andererseits ist für $s > 1$
$$\frac{1}{|\zeta(s, \chi)|} = \left|\prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)\right| \leqq \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right) < \zeta_{\kappa}(s) \leqq (\zeta(s))^n,$$
also
$$\frac{1}{\left|\zeta\left(\frac{9}{8}, \chi\right)\right|} < \lambda_{20},$$
$$1 < \lambda_{17} \lambda_{20} (DN\mathfrak{f})^{-\frac{5}{8}} e^{\lambda_{18} \log^{\lambda_{19}} (DN\mathfrak{f})},$$
$$DN\mathfrak{f} < \lambda_{14},$$
q. e. d.

Göttingen, den 4. Januar 1919.

Über die Studysche Rundungsschranke.

Von

C. Carathéodory in Berlin.

Herr **Study** hat durch sehr einfache Überlegungen den schönen Satz gefunden*), daß wenn eine analytische Funktion $w = f(z)$ im Inneren eines Kreises $|z| < R$ regulär ist und diese (offene) Kreisfläche eineindeutig auf das Innere eines nicht notwendig beschränkten **konvexen** Gebietes U abbildet, jeder konzentrische Kreis $|z| = \varrho$ für $\varrho < R$ einer **konvexen** analytischen Kurve innerhalb U entspricht. Hieraus folgt unmittelbar, daß jeder beliebige Kreis $\varkappa$ der z-Ebene, der ganz im Inneren von $|z| < R$ liegt, ebenfalls das Bild einer konvexen analytischen Kurve in U sein muß, denn man kann durch eine Möbiussche Kreisverwandtschaft die beiden Kreise $|z| = R$ und $\varkappa$ in konzentrische Kreise transformieren.

Es sei nun S eine beliebige Sehne des konvexen Gebietes U und C sei die analytische Kurve, die vermöge der Abbildung $w = f(z)$ innerhalb der Kreisfläche $|z| < R$ dieser Sehne entspricht. Ferner sei $\varkappa$ irgendein Kreis der ganz im Inneren von $|z| < R$ liegt und die Kurve C in einem Punkte P berührt. Jeder Kreis $\varkappa_1$, der $\varkappa$ in P berührt, diesen letzten Kreis umschließt und ganz im Inneren von $|z| < R$ liegt, ist nach dem Vorigen das Bild einer konvexen Kurve, die also ganz auf der einen Seite ihrer Tangente, der Sehne S, liegen muß; der Kreis $\varkappa_1$ liegt also ebenfalls ganz auf der einen Seite von C und hieraus folgt, daß $\varkappa$ sicher kein Krümmungskreis von C sein kann. Wir schließen hieraus, *daß jeder Krümmungskreis von C den Kreis $|z| = R$ notwendig schneiden oder berühren muß.*

Will man dieses geometrische Resultat durch eine analytische Relation darstellen, so genügt es, die Bedingungen zu suchen, denen die Koeffizienten der Funktion $f(z)$ genügen müssen, damit jede Kurve der w-Ebene, die im Punkte $w_0 = f(0)$ einen Wendepunkt besitzt, das Bild einer Kurve der z-Ebene sei deren Krümmungskreis, keinen Punkt außerhalb des Kreises $|z| \leq R$ enthält. Eine leichte Rechnung zeigt, daß dies der Fall ist, sobald die Relation $|f'(0)| \leq 2R\,|f''(0)|$ besteht. Diese letzte Relation folgt auch aus den Überlegungen meiner oben zitierten Arbeit; dort habe ich ferner gezeigt, daß das Gleichheitszeichen nur dann gelten kann, wenn das Gebiet U eine Halbebene ist, woraus man entnimmt, daß ein beliebiger Krümmungskreis der Kurve C den Kreis $|z| = R$ nur dann berührt, wenn C selbst ein Kreis, U eine Halbebene und die Sehne S eine zum Rande dieser Halbebene parallele Gerade ist.

*) E. Study und W. Blaschke, Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Geometrie (Leipzig, Teubner 1913) p. 109. Siehe auch meine Arbeit: Sur la représentation conforme des polygones convexes (Ann. Soc. Scient. de Bruxelles T. XXXVIII sec. partie, 1913).

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Hofrat Dr. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften" ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. L. Prandtl in Göttingen für die Arbeit „Über den Luftwiderstand von Kugeln" (in den Göttinger Nachrichten von 1914) zuerkannt worden.

Nachträgliche Bemerkung über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Die Erweiterung des Definitionsbereichs einer auf einer abgeschlossenen Punktmenge definierten stetigen Funktion, welche, wie ich S. 209—211 dieses Annalenbandes hervorgehoben habe, durch Spezialisierung einer Math. Ann. 71, S. 309—311 von mir definierten Konstruktion erhalten wird, ist seitdem ebenfalls, nicht nur, wie angegeben, von De la Vallée Poussin und Bohr, sondern auch von Tietze im Journ. f. Math. 145, S. 10—11 erzielt worden, und zwar steht Tietzes Methode der meinigen sehr nahe und besitzt den gleichen elementaren Charakter: es werden nur, statt Simplexe, Kuben gebraucht.

Berichtigung

zu dem Aufsatze von L. E. J. Brouwer: „Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich." Math. Ann. 69, S. 176—180.

S. 179, Z. 19	zu streichen:	miteinander zusammenhängenden
Z. 20—21	zu streichen:	mit einem Rande zusammenhängenden
Z. 30—31	zu streichen:	der Cartesischen Ebene in sich oder des Kreiszylinders in sich
Z. 32	statt:	in solche Gebiete zerlegen
	zu lesen:	durch solche Gebiete erschöpfen.

Wie alle wissenschaftlichen Zeitschriften, die in beschränkter Auflage erscheinen und ihre Abbonnenten zum großen Teil im Ausland haben, so sind auch die Annalen durch den Ausfall dieser, wie andrerseits durch die sich ins Ungemessene steigernden Herstellungskosten in ihrer Weiterführung schwer betroffen. Der Verlag will auch weiterhin die so beträchtlich erhöhten Opfer, die ihm diese auferlegt, nicht scheuen, um den Weiterbestand der für die Pflege der mathematischen Wissenschaft und ihrer internationalen Beziehungen so wichtigen Zeitschrift, die mit dem nächsten im August d. J. erscheinenden Heft ihren achtzigsten Jahrgang beginnt, zu ermöglichen. Die Redaktion und der Verlag bitten darum den schwierigen Verhältnissen gegenüber, die auf das regelmäßige Erscheinen und den Umfang der Hefte nicht ohne Einfluß bleiben konnten, gütige Nachsicht zu üben und sie in ihrem Bestreben, den Annalen über die schwierigen Zeiten hinwegzuhelfen, zu unterstützen. Dann hoffen sie, unter günstigeren Bedingungen sie zu neuer Entwicklung zu bringen und damit auch dem Ansehen der deutschen wissenschaftlichen Arbeit im Ausland förderlich zu sein.

Redaktion und Verlag.

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. E. J. BROUWER, CONSTANTIN CARATHÉODORY, OTTO HÖLDER,
CARL NEUMANN, MAX NOETHER

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

WALTHER V. DYCK
IN MÜNCHEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

79. Band.

Mit 6 Figuren im Text

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1919

Inhalt des neunundsiebzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)